Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Sia $d(n)$ il numero di divisori positivi di n e $\varphi(n)$ la funzione di Eulero. Determinare tutti gli interi positivi n tali che n divide $\phi(n)^{d(n)} + 1$ ma $d(n)^5$ non divide $n^{\phi(n)} - 1$.

2. Un intero positivo n è detto un *quasiquadrato* se può essere scritto come prodotto di due interi positivi a, b la cui differenza è al massimo un centesimo del più grande dei due. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n tali che $n, n+1, n+2, n+3$ siano tutti *quasiquadrati*.

3. Sia p un primo dispari. Determinare se esiste una permutazione $a_1, \dots, a_p$ di $1, \dots, p$ che soddisfa la condizione
$$(i-j)a_k + (j-k)a_i + (k-i)a_j \neq 0$$
per ogni terna di indici distinti i, j, k fra 1 e p (estremi inclusi).