OliMaTO 10

Simulazione Gara Nazionale 2024

24 Aprile 2024

Benvenuti alla decima edizione della simulazione della gara nazionale delle Olimpiadi della Matematica sotto l'egida di OliMaTO, la quattordicesima complessiva.
Compilare la prima parte di questo modulo prima della gara e la seconda parte prima di consegnare.

NOME:

COGNOME:

Anno di corso:

Istituto frequentato:

Provincia di appartenenza:

Indirizzo e-mail:

Punteggio alla gara distrettuale (indicare se si parteciperà alla gara nazionale individuale):

Indica qui di seguito i punteggi che PENSI di aver ottenuto nei seguenti esercizi:

Esercizio 1:

Esercizio 2:

Esercizio 3:

Esercizio 4:

Esercizio 5:

Esercizio 6:

Punteggi ottenuti (spazi riservati ai correttori):

1. 2. 3. 4. 5. 6. TOT.

REGOLAMENTO

- Si raccomanda di scrivere le soluzioni esclusivamente nel fascicoletto che avete ricevuto, utilizzando un foglio diverso per ogni esercizio risolto. Per poter partecipare alla gara è necessario essere muniti di un documento d'identità. Lasciatelo in evidenza sul vostro banco.
- Gli unici strumenti consentiti sono quelli per scrivere e per disegnare. In particolare, **non è consentito** l'utilizzo di appunti, tavole, macchine calcolatrici, strumenti elettronici di qualsiasi genere e telefoni cellulari o qualsivoglia mezzo di comunicazione con l'esterno.
- Per ragioni organizzative non è consentito lasciare il proprio posto senza l'autorizzazione del personale di sorveglianza. Per qualsiasi necessità dovete alzare la mano e attendere. In particolare, questa procedura deve essere seguita per:
  - porre dei quesiti relativi al testo della prova;
  - chiedere di andare in bagno (prima di recarvi in bagno raccogliete tutto ciò che avete scritto e consegnatelo al sorvegliante. Non è consentito andare in bagno durante i primi 30 minuti e durante gli ultimi 45 minuti di gara);
  - consegnare il compito.
- La durata della prova è di 4 ore e 30 minuti. Ogni esercizio vale 7 punti.
- Solo durante i primi 30 minuti di gara è consentito porre delle domande per chiarimenti sul testo.
- Negli ultimi 10 minuti di gara non è consentito consegnare il compito. Tutti quelli che saranno rimasti in aula fino a quel momento dovranno lasciare il fascicoletto chiuso sul proprio tavolo, senza altri fogli o brutte copie, ed attendere il termine ufficiale della gara. Al termine esatto i sorveglianti provvederanno a raccogliere tutti i fascicoletti e solo alla fine sarete autorizzati a lasciare l'aula.

Buon lavoro!!!

Testi a cura di: Lorenzo Capponi, Giulio Cosentino, Jiakai Hu, Tommaso Pignatelli, Antonio Polignano.

Ringraziamo Carlo Baronio, Alberto Cagnetta, Matteo Damiano e Simone Foti per la collaborazione.

Esercizio 1

Alberto vuole colorare ciascuno dei numeri interi da 1 a n, estremi inclusi. I colori a disposizione sono il rosso e il blu, e ognuno dei due colori deve essere utilizzato almeno una volta. Inoltre, devono essere verificate le seguenti condizioni:

- ogni numero rosso è la somma di due numeri blu distinti;
- ogni numero blu è la differenza tra due numeri rossi;
- il numero 3 è colorato di rosso.

Determinare il minimo intero positivo n per cui esiste una tale colorazione.

Soluzione proposta

La risposta è $n = 9$. Una colorazione possibile è 123456789.

Dimostriamo che non può esistere una colorazione valida per $n \leq 8$. Per la prima condizione, 1 e 2 devono essere blu in quanto non esprimibili come somma di interi positivi distinti. Segue anche che 4 è blu per lo stesso motivo. Poiché 4 deve essere la differenza tra due numeri rossi e il più piccolo numero rosso è 3, deve esserci un numero rosso maggiore o uguale a 7.

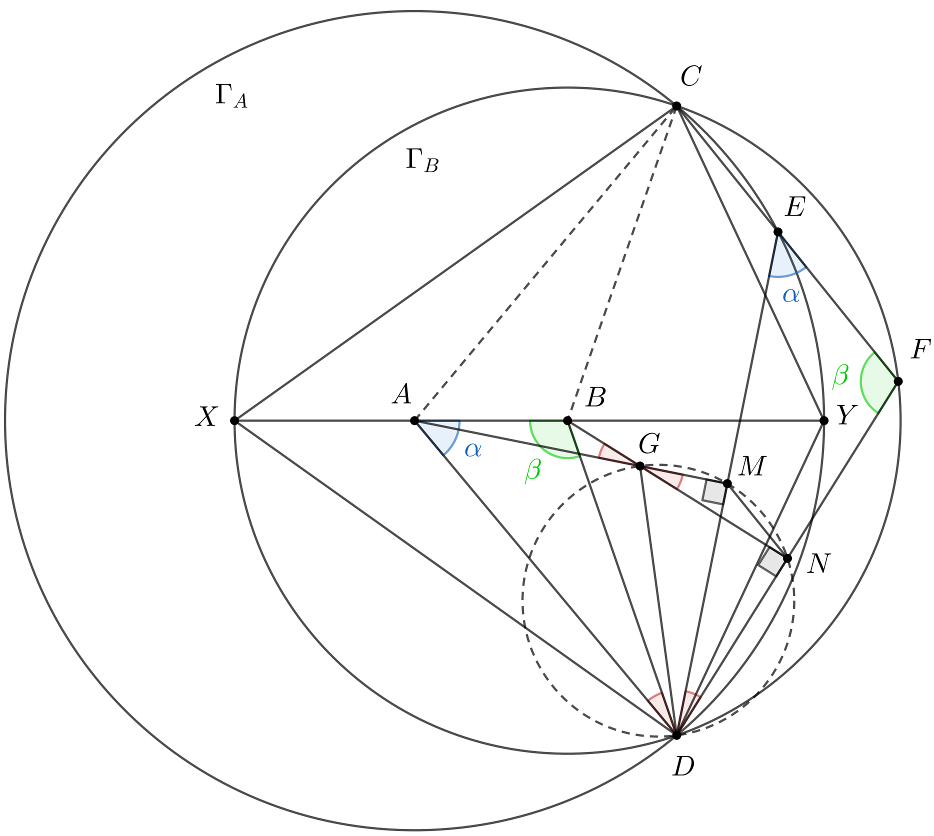
Supponendo per assurdo che esista una colorazione valida per $n = 7$, il numero 7 deve essere rosso. Poiché 1 è blu, devono esserci due numeri rossi consecutivi: l'unica possibilità è che 6 sia rosso. Ora, poiché 2 è blu, devono esserci due numeri rossi con differenza 2, quindi anche 5 deve essere rosso; tuttavia, si ottiene una colorazione in cui il 7, rosso, non è somma di due numeri blu, assurdo.

Infine, supponiamo per assurdo che esista una colorazione valida per $n = 8$. Se almeno uno tra 6, 7, 8 fosse blu, allora dovrebbero esserci due numeri rossi con differenza maggiore o uguale a 6, il che implicherebbe l'esistenza di un numero rosso maggiore di 8, essendo 3 il più piccolo numero rosso. D'altra parte, se 6, 7, 8 sono tutti rossi non è possibile ottenere 8 come somma di due numeri blu distinti, quindi anche in questo caso otteniamo un assurdo.

Esercizio 2

Le circonferenze Γ_A e Γ_B, di centri A e B rispettivamente, si intersecano nei punti distinti C e D, in modo che A e B si trovino nell'intersezione tra i due cerchi individuati da Γ_A e Γ_B, dalla stessa parte rispetto alla retta CD; inoltre, $AC > BC$. La retta AB interseca Γ_A e Γ_B rispettivamente in Y e X, in modo che X, A, B, Y risultino allineati in quest'ordine. Sia E un punto sull'arco CY di Γ_A non contenente D e sia F l'intersezione della retta CE con Γ_B diversa da C. Detti M e N i punti medi rispettivamente di DE e DF, i segmenti AM e BN si intersecano in G. Dimostrare che A, D, G, B giacciono su un'unica circonferenza.

Soluzione proposta



Dimostriamo che i triangoli ADB e EDF sono simili. Siano α e β le misure rispettivamente di $\angle BAD$ e $\angle DBA$. Poiché l'angolo concavo $\angle CAD$ misura $360° - 2\alpha$, il suo relativo angolo alla circonferenza $\angle DEC$ misura $180° - \alpha$, dunque $\angle FED = \alpha$. Similmente, l'angolo concavo al centro $\angle CBD = 2\beta$ misura il doppio del relativo angolo alla circonferenza $\angle DFC = \angle DFE = \beta$.

Notiamo che la retta AG è l'asse della corda DE in quanto A è il centro di Γ_A, pertanto $AM \perp DE$; analogamente $BN \perp DF$. Il quadrilatero $DNMG$ è allora ciclico in quanto $\angle DMG = \angle DNG = 90°$. Ora verifichiamo la seguente catena di uguaglianze:

$$\angle ADB = \angle EDF = \angle MDN = \angle MGN = \angle AGB.$$

La prima uguaglianza segue dalla similitudine tra ADB e EDF; la terza segue della ciclicità del quadrilatero $DNMG$. L'uguaglianza $\angle ADB = \angle AGB$ implica che il quadrilatero $ADGB$ è ciclico, che è la tesi.

Esercizio 3

Sia $a_0, a_1, a_2, \ldots$ la successione di interi positivi definita nel modo seguente: $a_0 = 2$ e, per ogni $n \geq 1$, a_n è il minimo intero positivo tale che
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 1.$$
Per esempio, $a_1 = 3$ in quanto $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$ mentre $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Dimostrare che nessun termine della successione è un quadrato perfetto.

Soluzione proposta

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 0$ vale
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{k-1}{k}$$
per qualche k intero positivo.

Il passo base per $n = 0$ è ovviamente verificato. Supponendo ora che la tesi sia vera per un generico n, abbiamo
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{h-1}{h} + \frac{1}{a_{n+1}}$$
per qualche h intero positivo. Osserviamo che $\frac{h-1}{h} + \frac{1}{h} = 1$, quindi per come è definita la successione deve valere $\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{h}$, che implica $a_{n+1} = h + 1$. Allora
$$\frac{h-1}{h} + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{h-1}{h} + \frac{1}{h+1} = \frac{(h^2+h)-1}{(h^2+h)},$$
il che completa il passo induttivo.

Per ogni $n \geq 0$, detto k_n l'intero positivo tale che
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{k_n - 1}{k_n},$$
vale
$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{k_n-1}{k_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{k_n-1}{k_n} + \frac{1}{k_n+1} \\ &= \frac{k_n^2 + k_n - 1}{k_n^2 + k_n} \\ &= \frac{k_{n+1}-1}{k_{n+1}},\end{aligned}$$
da cui segue $k_{n+1} = k_n^2 + k_n$. L'uguaglianza $a_{n+1} = k_n + 1$ è giustificata dal fatto che $\frac{k_n-1}{k_n} + \frac{1}{k_n} = 1$ e per ipotesi deve valere $\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{k_n}$.

Dimostriamo infine per induzione che per ogni $n \geq 1$ il resto della divisione di k_n per 4 è 2. Il passo base è verificato in quanto $k_1 = 6$. Supponiamo che per un generico n valga $k_n = 4m + 2$ per qualche m intero: allora
$$k_{n+1} = k_n^2 + k_n = (4m+2)^2 + (4m+2) = 16m^2 + 16m + 4 + 4m + 2 = 4(4m^2 + 5m + 1) + 2,$$
e il passo induttivo è verificato (quest'ultimo passaggio si può svolgere anche con le congruenze modulari).

Per concludere, osserviamo che essendo $a_{n+1} = k_n + 1$ per ogni $n \geq 0$, ogni termine a_n con $n \geq 2$ dà resto 3 nella divisione per 4. Poiché un quadrato perfetto può dare soltanto resto 0 o 1 nella divisione per 4, nessun termine della successione da a_2 in poi può essere un quadrato perfetto. Nemmeno $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$ sono quadrati perfetti, pertanto la dimostrazione è conclusa.

Variante 1. Invece di ragionare sui resti nella divisione per 4, si può ragionare sulle ultime cifre: si può in particolare dimostrare che ogni termine a_i di indice i pari eccetto a_0 finisce per 7, mentre ogni termine a_i di indice dispari finisce per 3. Questo esclude l'esistenza di quadrati perfetti nella successione, in quanto nessun quadrato perfetto finisce per 2, per 3, o per 7.

Variante 2. Invece di ricavare la relazione di ricorrenza $k_{n+1} = k_n^2 + k_n$ oppure $a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n + 1$, in cui ogni termine dipende solo dal precedente, si può dimostrare che vale la relazione di ricorrenza

$$a_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} a_i + 1$$

per ogni $n \geq 0$. Dopodiché si può procedere ragionando sui resti nella divisione per 4, come nella soluzione proposta, o sulle ultime cifre dei termini della successione.

Variante 3. Dalla relazione $k_{n+1} = k_n^2 + k_n$ si ottiene immediatamente $a_{n+2}^2 = a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1$. Invece di ragionare sui resti nella divisione per 4 o sulle ultime cifre, si può osservare che per ogni $n \geq 0$ vale

$$(a_{n+1} - 1)^2 < a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1 < a_n^2$$

in quanto $a_{n+1} > 1$. Questo dimostra che $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1$ non è un quadrato perfetto, in quanto strettamente compreso tra due quadrati perfetti consecutivi.

Esercizio 4

In ciascuna delle 64 caselle di una griglia quadrata 8×8 si trova una moneta, che può mostrare testa oppure croce. Inizialmente c'è un numero pari di monete che mostrano testa. Una mossa consiste nello scegliere due caselle con un lato in comune e capovolgere le due monete che si trovano in queste caselle. Per vincere, occorre ottenere la configurazione in cui tutte le monete mostrano testa. Per ogni possibile configurazione iniziale C di monete, sia $f(C)$ il minimo numero di mosse necessarie per vincere.

(a) Determinare il massimo valore M di $f(C)$ tra tutte le possibili configurazioni iniziali.

(b) Determinare quali sono le configurazioni iniziali per cui non è possibile vincere con meno di M mosse.

Soluzione proposta

(a) La risposta è $M = 32$. Un esempio di configurazione che richiede almeno 32 mosse è quella in cui ci sono croci in ogni casella.

Dimostriamo che 32 mosse sono sufficienti per qualunque configurazione.

Nota. *Si possono trovare molti algoritmi diversi che assicurano di effettuare al più 32 mosse. Alcuni di questi consistono nel suddividere la griglia in diverse regioni e mostrare che è possibile lavorare su una regione per volta; la soluzione che forniamo è di questo tipo.*

Consideriamo una colorazione a scacchiera della griglia, e partizioniamola in 16 quadrati 2×2. Diamo qualche definizione (che ci tornerà utile anche nel punto (b)).

Definizione. Diciamo *quadrato* uno dei 16 quadrati 2×2 in cui abbiamo partizionato la griglia 8×8.
Definizione. Diciamo *percorso* una sequenza di quadrati $P = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_k)$, con $2 \leq k \leq 16$, tali che per ogni $i = 1, 2, \ldots, k-1$, i quadrati Q_i e Q_{i+1} condividono un lato (ovvero sono *adiacenti*).
Definizione. Diciamo che un quadrato può essere *risolto* in t mosse, se eseguendo t mosse siamo in grado di ottenere 4 teste in quel quadrato. Si noti che una di tali mosse può anche agire su una sola casella del quadrato (ossia agisce anche su una casella al di fuori del quadrato).
Definizione. Siano Q e S due quadrati adiacenti: se durante la risoluzione di Q eseguiamo una mossa che gira anche una moneta di S, diciamo che abbiamo *perturbato* il quadrato S.

Lemma. Ogni quadrato Q può essere risolto in al più due mosse, perturbando al più un quadrato adiacente; in particolare, è sempre possibile scegliere quale quadrato adiacente a Q perturbare.

Dimostrazione. Se il quadrato ha un numero pari di croci si può risolvere senza perturbare nessun altro quadrato. Se ci sono 3 croci, ne giriamo due adiacenti con una mossa, e giriamo la terza croce con una moneta in una casella adiacente: abbiamo 4 modi per farlo, ognuno perturba un quadrato diverso. Se c'è una sola croce con una mossa la scambiamo con una testa all'interno del quadrato in modo che diventi adiacente al quadrato che vogliamo perturbare e poi con la seconda mossa la rendiamo testa perturbando quel quadrato (oppure è già nella posizione che vogliamo e ci basta una mossa). □

Ora consideriamo un qualunque percorso costituito dai 16 quadrati: risolviamo ogni quadrato in al più 2 mosse seguendo il percorso, eventualmente perturbando il quadrato successivo; l'ultimo quadrato è risolvibile in al più 2 mosse senza perturbare altri quadrati, poiché siccome una mossa non cambia la parità delle teste presenti nella griglia, esso contiene un numero pari di croci, da cui segue che in al più 32 mosse possiamo risolvere la griglia.

(b) *Nota: facciamo riferimento alle definizioni introdotte nel punto (a).*

Indichiamo con C le croci e con T le teste. Consideriamo una colorazione a scacchiera della griglia, e partizioniamola in 16 quadrati 2×2. Diamo qualche ulteriore definizione.

Definizione. Diciamo *loop* un percorso chiuso che comprende tutti e 16 i quadrati, ovvero una sequenza di quadrati $L = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_{16})$ tali che per ogni $i = 1, 2, \ldots, 16$, i quadrati Q_i e Q_{i+1}, presi gli indici modulo 16, condividono un lato (ovvero sono adiacenti).
Definizione. Diciamo *angolo brutto* un insieme di tre caselle ad "L" della griglia tali che la casella centrale sia una casella in un angolo della griglia e contenga una C, e le altre due caselle adiacenti contengano una T.
Definizione. Diciamo *quadrato brutto* un quadrato 2×2 (in un angolo della griglia) che contiene un angolo brutto.

Dimostreremo che le configurazioni che necessitano di 32 mosse per essere risolte sono tutte e sole

(i) quelle dove le T compaiono tutte sullo stesso colore;

(ii) quelle in cui vi è almeno un quadrato brutto, e tutte le T che non compaiono in un angolo brutto sono sullo stesso colore.

Innanzitutto, mostriamo che queste configurazioni richiedono effettivamente 32 mosse.
Nelle le configurazioni del tipo (i) abbiamo che su almeno uno dei due colori non sono presenti T, di conseguenza ci sono 32 C su caselle di uno stesso colore, e poiché una mossa modifica due monete su colori diversi, non è possibile girare più di una di queste croci con una mossa, da cui segue che sono necessarie almeno 32 mosse.
Data una configurazione del tipo (ii), supponiamo senza perdita di generalità che le teste che non si trovano su un quadrato brutto siano su caselle bianche. Osserviamo che possono esserci al massimo due quadrati brutti tali che la croce nell'angolo sia su una casella bianca (e quindi le due teste adiacenti su caselle nere), e che questi due eventuali quadrati brutti devono trovarsi in angoli opposti. Prendiamo una tale configurazione. L'insieme degli altri 14 quadrati è tale che su tutte le caselle nere sono presenti C, dunque sono necessarie almeno 28 mosse. Infine servono almeno altre due mosse per sistemare ciascuna delle due croci in un angolo della griglia su un quadrato brutto, in quanto nessuna delle due si trova adiacente a un'altra testa: quindi, anche in questo caso sono necessarie 32 mosse.

Adesso supponiamo per assurdo che esista una configurazione diversa da quelle descritte che richiede 32 mosse per essere risolta. Riprendiamo il ragionamento del punto (a): abbiamo esibito un algoritmo che risolve la griglia in 32 mosse. Ora mostriamo che seguendo un loop opportuno siamo in grado di risolvere la griglia "risparmiando" una mossa in un certo punto, ovvero riuscendo a risolvere un certo percorso di k quadrati (eventualmente anche solo un quadrato) in meno di $2k$ mosse.

Osservazione. Se abbiamo un quadrato che si risolve in una sola mossa, possiamo iniziare a percorrere il loop da quel quadrato, risparmiando una mossa, e risolvere la griglia in al più 31 mosse.

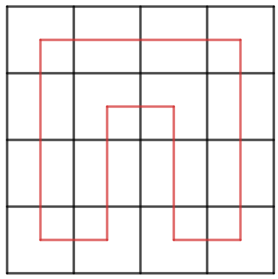
Osservazione. Un quadrato con due T su colori diversi è risolvibile in una sola mossa, a meno che non sia un quadrato brutto.

Segue che i quadrati della nostra configurazione o sono un quadrato brutto, o non hanno T o hanno tutte le T sullo stesso colore, poiché se esistesse un quadrato Q che non rispetta una di queste tre condizioni, potremmo scegliere un loop e partire da quel quadrato risolvendo la griglia in al più 31 mosse. D'ora in avanti considereremo soltanto configurazioni i cui quadrati sono di questo tipo.

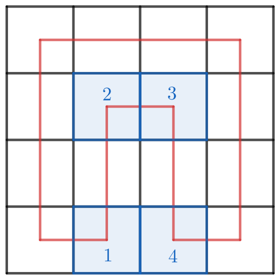
Definizione. Diciamo che un quadrato non brutto è *nero* se ha almeno una T e tutte le T in esso sono su caselle nere, mentre è *bianco* se ha almeno una T e tutte le T in esso sono su caselle bianche.

Dunque i quadrati possono essere solo di questi 4 tipi: quadrati brutti, quadrati con solo C, quadrati neri o quadrati bianchi.

Definizione. Chiamiamo loop *among-us* il seguente loop.



Notiamo che nel loop ci sono 8 quadrati in cui avviene un cambio di direzione (che chiameremo *curva*): i quadrati quadrati d'angolo e poi i quattro quadrati evidenziati nella seguente figura.



Dimostriamo che non esiste una coppia di quadrati di cui uno nero e uno bianco.

Se esiste una tale coppia allora prendiamo un loop among-us e consideriamo un quadrato nero e un quadrato bianco tali che uno dei due percorsi nel loop che li collegano sia privo di quadrati bianchi o neri.
Da adesso in avanti chiamiamo N questo quadrato nero e B questo quadrato bianco.

1) Se N e B sono adiacenti, possiamo risolvere la coppia 2×4 in al più tre mosse poiché con una mossa possiamo girare due croci, una per ognuno dei due quadrati, e con le altre due mosse sistemare le croci restanti, eventualmente perturbando altri quadrati oltre a N e B.

   In molti dei casi successivi risolveremo, in due mosse, alcuni quadrati seguendo il percorso in modo da avere, alla fine, un quadrato composto da tre T che mostreremo si può risolvere in una mossa sola; questo conclude.

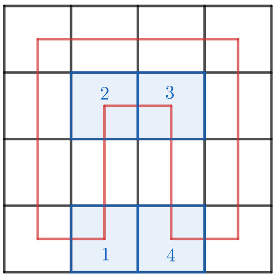
2) Se N e B non sono adiacenti e nel percorso che unisce N e B non compaiono quadrati brutti, allora compaiono solo quadrati con tutte C. In questo caso, possiamo procedere da un quadrato verso l'altro come nell'algoritmo del punto (a) (come scegliere quello da cui partire sarà spiegato in seguito); supponiamo di seguire il percorso dal nero verso il bianco. Per prima cosa risolviamo il quadrato nero in due mosse, in modo che la prima lasci solo una C nel quadrato, e la seconda perturbi il quadrato con sole C adiacente a lui, trasformandolo quindi in un quadrato nero. Iterando questo procedimento, arriviamo a perturbare il quadrato bianco in una casella nera. Otteniamo o un quadrato con due T adiacenti che si può risolvere in una mossa senza perturbare nulla, il che porta all'assurdo; oppure un quadrato con tre come anticipato, in cui la C non è adiacente al quadrato precedente nel percorso. Mostriamo che ora questo quadrato si può risolvere in una sola mossa senza perturbare i quadrati precedenti nel percorso.

   Se non sta in una curva allora è chiaro che si possa procedere perturbando solo il quadrato successivo nel percorso.

   Se sta in un angolo, sappiamo che non è un quadrato brutto perché una mossa prima era un quadrato bianco e anche in questo caso si verifica che si può procedere perturbando solo il quadrato successivo nel percorso.

Se N sta in uno dei punti colorati nella figura sottostante ma B no, seguiamo il percorso da N a B; nel caso simmetrico prendiamo il percorso da B a N.

Se si trovano entrambi in due dei punti colorati i figura e sono adiacenti, ci riconduciamo al caso 1; se non sono adiacenti, si verifica facilmente che è possibile risolvere il quadrato perturbando (eventualmente) dei quadrati che non fanno parte del percorso,formato da due quadrati, che li unisce.



3) Supponiamo che N e B non siano adiacenti e che nel percorso che li unisce compaia almeno un quadrato brutto.

Definizione. Diciamo ora che un angolo brutto è *nero* se ha le T sul nero, diciamo che è *bianco* se ha le T sul bianco. Diciamo che un quadrato brutto è *nero* se contiene un angolo brutto nero, e che è *bianco* se contiene un angolo brutto bianco.

Notiamo che nel percorso che unisce N e B non ci possono essere sia un quadrato brutto bianco sia un quadrato brutto nero entrambi con tre T, poiché altrimenti possiamo risparmiare una mossa: infatti, possiamo considerare il percorso che li unisce, e per come abbiamo scelto N e B, sappiamo che tra di essi ci sono solo quadrati con tutte C, possiamo, dunque, procedere come nel punto due ottenendo un quadrato con due T adiacenti, il che porta all'assurdo.

Definizione. Diciamo che un quadrato Q è *direttamente collegato* a un quadrato brutto se tra Q e il quadrato brutto nel nostro percoso ci sono solo quadrati con tutte C (oppure se sono adiacenti).

Notiamo che se un un quadrato nero è direttamente collegato a un quadrato brutto nero con tre T, allora è possibile risparmiare una mossa ragionando come in precedenza.

Osserviamo che un quadrato del colore A (bianco o nero che sia) può "attraversare" un quadrato brutto con due T, ovvero far sì che esso perturbi il quadrato successivo nel percorso in una casella del colore A.

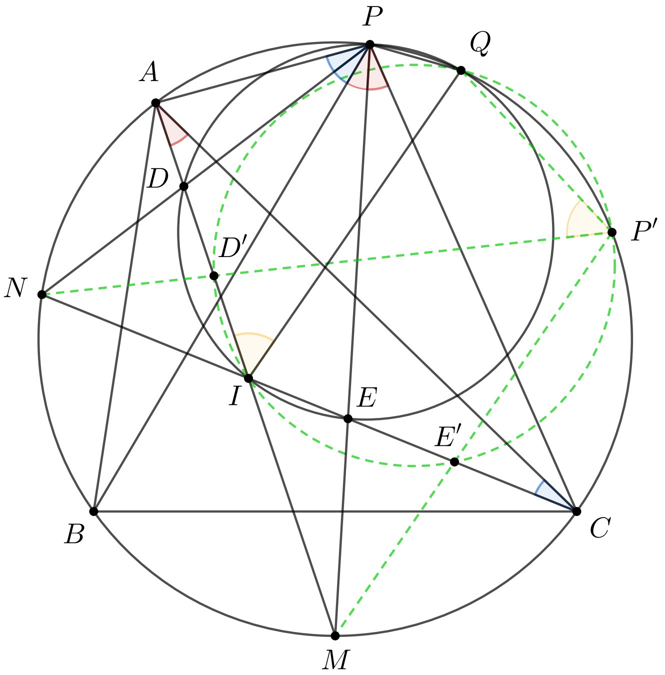
Possiamo quindi supporre che nel nostro percorso non ci siano quadrati brutti con due T, e ci riconduciamo quindi a uno dei casi già trattati.

Segue che i quadrati diversi dai quadrati brutti sono o tutti bianchi o tutti neri. Inoltre un quadrato nero non può essere collegato a un quadrato brutto nero con tre T, e viceversa un quadrato bianco non può essere collegato a un quadrato brutto bianco con tre T. Allora le uniche configurazioni possibili sono proprio quelle descritte all'inizio, il che porta a un assurdo.

Esercizio 5

Sia ABC un triangolo e Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia P un punto sull'arco AC di Γ non contenente B. Le bisettrici di $\angle CAB$ e $\angle BPA$ si intersecano in D. Le bisettrici di $\angle BCA$ e $\angle CPB$ si intersecano in E. Dimostrare che al variare di P sull'arco AC che non contiene B il luogo dei circocentri del triangolo PDE è un segmento.

Soluzione proposta



Innanzitutto dimostriamo che, detto I l'incentro di ABC, i punti P, D, I, E sono conciclici. Chiamata M l'intersezione diversa da A tra Γ la retta AD, si hanno

$$\angle CAI = \angle CAM = \angle CPM = \angle MPB,$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla ciclicità di $AMCP$. Analogamente, chiamata N l'intersezione diversa da C tra Γ e la retta CE, si hanno

$$\angle ICA = \angle NCA = \angle NPA = \angle BPN.$$

Poiché

$$\angle DIE = \angle AIC = 180^\circ - (\angle CAI + \angle ICA) = 180^\circ - (\angle MPB + \angle BPN) = 180^\circ - \angle EPD,$$

il quadrilatero $PDIE$ è ciclico.

Sia Q la seconda intersezione tra Γ e la circonferenza circoscritta a $PDIE$. Dimostriamo che, al variare di P sull'arco AC, il punto Q è fisso. Questo implica la tesi: infatti, avendo già mostrato che la circonferenza circoscritta a PDE passa sempre per I, segue che il circocentro di PDE giace sull'asse di IQ.

Per dimostrare che il punto Q è fisso, prendiamo un altro punto P' sull'arco AC non contenente B, definiamo i punti D', E' analogamente rispetto a D, E, e verifichiamo che P', Q, D', I, E' sono conciclici. Osserviamo che P', D', N sono allineati, poiché N è il punto medio dell'arco AB non contenente C (questo segue da $\angle NPA = \angle BPN$ e $\angle NP'A = \angle BP'N$). Ora supponiamo che i punti A, P, Q, P', C giacciano in quest'ordine sull'arco AC (gli altri casi si trattano in modo analogo; è possibile utilizzare i cosiddetti angoli orientati per considerare contemporaneamente tutti i casi):

$$\begin{aligned}
\angle D'P'Q &= \angle NP'Q \\
&= 180^\circ - \angle QPN \qquad \text{per la ciclicità di } NP'QP \\
&= 180^\circ - \angle QPD \\
&= \angle DIQ \qquad \text{per la ciclicità di } QPDI \\
&= \angle D'IQ.
\end{aligned}$$

L'uguaglianza $\angle D'P'Q = \angle D'IQ$ implica che Q, D', I, P' sono conciclici, e per quanto già mostrato in precedenza sappiamo che anche E' appartiene a tale circonferenza.

Esercizio 6

Dato un intero positivo n, si considerino tutte le sequenze $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con $1 \leq k \leq n$ di interi positivi tali che $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Ad esempio, per $n = 3$ le possibili sequenze sono $(1, 1, 1), (1, 2), (2, 1), (3)$. Sia $m(n)$ il massimo valore possibile di $\text{mcm}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ al variare di tutte le possibili sequenze che danno somma n (il minimo comune multiplo associato a una sequenza costituita da un unico numero è il numero stesso). Per esempio, $m(5) = 6$ perché vale $\text{mcm}(2, 3) = 6$ e per ogni altra sequenza di interi positivi con somma 5 il minimo comune multiplo è minore o uguale 6. Una sequenza $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ di interi positivi con $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ si dice n-*ottimale* se $\text{mcm}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = m(n)$.

(a) Dimostrare che per ogni intero positivo n esiste una sequenza n-ottimale in cui compaiono soltanto potenze di primi (eventualmente con esponente uguale a 0 a 1) a due a due coprime.

(b) Determinare tutti gli interi positivi n per cui $m(n)$ è un numero dispari.

Soluzione proposta

(a) Mostriamo che per ogni n esiste una sequenza n-ottimale $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ in cui i termini sono a due a due coprimi. Supponiamo che $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sia n-ottimale e che esistano $b_i = xy$ e $b_j = xz$ con $x > 1$ intero e y, z interi positivi coprimi. Sostituendo b_j nella sequenza con $(z, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{xz - z \text{ volte}})$, restano invariati la somma e il minimo comune multiplo dei numeri della sequenza, pertanto la sequenza è ancora n-ottimale, e ora b_i è coprimo con ciascuno dei numeri che hanno rimpiazzato b_j. Si può continuare a effettuare sostituzioni in questo modo fino a quando tutti gli elementi della successione sono a due a due coprimi.

Ora mostriamo che, data una sequenza n-ottimale $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ in cui i termini sono a due a due coprimi, è possibile ottenere con opportune sostituzioni un'altra sequenza ottimale in cui ogni termine è la potenza di un numero primo, eventualmente con esponente 0 o 1 (e tutti i termini sono a due a due coprimi). Supponiamo che $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sia n-ottimale e che esista $b_i = p^{e_1} q^{e_2}$ con p e q primi distinti. Sostituendo b_i nella sequenza con $(p^{e_1}, q^{e_2}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p^{e_1} q^{e_2} - p^{e_1} - q^{e_2} \text{ volte}})$, restano invariati la somma e il minimo comune multiplo dei numeri della sequenza, pertanto la sequenza è ancora n-ottimale. Se un termine della sequenza contiene più di due primi distinti nella sua fattorizzazione, si procede in modo analogo. Si può continuare a effettuare sostituzioni in questo modo fino a quando tutti gli elementi della successione sono potenze di primi.

(b) Consideriamo una sequenza n-ottimale $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con $\text{MCD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ in cui ogni termine è la potenza di un primo, di cui almeno una con esponente non nullo. Sia p il più piccolo primo tale che nella sequenza compare un termine p^h con $h \geq 1$, dimostriamo che $p < 5$. Supponiamo per assurdo $p \geq 5$ e distinguiamo due casi.

- Se $h = 1$, sostituiamo p nella sequenza con 2 e $p - 2$. Notiamo che 2 e $p - 2$ sono coprimi tra loro e anche con ciascuno degli altri termini della sequenza, poiché sono tutti 1 oppure potenze di primi maggiori di p. Dunque, con tale sostituzione otteniamo una sequenza con un minimo comune multiplo più grande poiché $2(p-2) > p$, in contraddizione con la n-ottimalità della sequenza originale.
- Se $h > 1$, sostituiamo p^h nella sequenza con $(p^{h-1}, p - 2, 2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p^h - p^{h-1} - p \text{ volte}})$. Osserviamo che questi nuovi numeri sono a due a due coprimi e ciascuno è anche coprimo con tutti gli altri termini della sequenza. Poiché $2(p - 2) \cdot p^{h-1} > p \cdot p^{h-1} = p^h$, tale sostituzione incrementa il minimo comune multiplo della sequenza, in contraddizione con la n-ottimalità della sequenza originale.

Ora consideriamo in particolare una sequenza n-ottimale $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con $\mathrm{MCD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ in cui ogni termine è la potenza di un primo e in cui non compare una potenza 2 diversa da 1. Dimostriamo che l'esponente di ogni potenza di primo è al più 1. Per assurdo, sia p un primo tale che p^h compare nella sequenza, con $h \geq 2$. Chiaramente esiste una potenza di 2, che indichiamo con 2^t, strettamente compresa tra p e $2p$. Sostituiamo p^h nella sequenza con $(p^{h-1}, 2^t, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p^h - p^{h-1} - 2^t \text{ volte}})$. Questi nuovi numeri sono a due a due coprimi e ciascuno è anche coprimo con tutti gli altri termini della sequenza (in quanto stiamo supponendo che nella sequenza originale non compaiano potenze di 2). Poiché $2^t p^{h-1} > p^h$, tale sostituzione incrementa il minimo comune multiplo della sequenza, in contraddizione con la n-ottimalità della sequenza originale. È anche importante osservare che la sostituzione è sempre possibile, ossia che $p^h - p^{h-1} - 2^t$: infatti, $p^h - p^{h-1} - 2^t > p^h - p^{h-1} - 2p = p^{h-1}(p-1) - 2p$ e vale $p^{h-1}(p-1) \geq 2p$ in quanto $p - 1 \geq 2$ (poiché $p \geq 3$) e $p^{h-1} \geq p$ (poiché $h \geq 2$).

Adesso prendiamo una sequenza n-ottimale in cui compaiono soltanto 1 e primi dispari distinti. Mostriamo che se due primi p e q appartengono alla sequenza allora nella sequenza compaiono anche tutti i primi compresi tra p e q. Supponiamo per assurdo che che i primi p e q distinti appartenenti alla sequenza non siano primi consecutivi. Per il Postulato di Bertrand, esiste un primo r che verifica contemporaneamente $p < r < q$ e $r > q/2$. Sostituiamo q nella sequenza con r e $q - r$. Poiché $q - r$ è pari, incrementa il minimo comune multiplo di un fattore 2, mentre r lo incrementa di un fattore r. Essendo $2r > q$, questo è in contraddizione con l'ottimalità della sequenza originale.

Infine dimostriamo che, in una sequenza n-ottimale in cui compaiono soltanto 1 e primi dispari distinti, non può comparire nessun primo maggiore o uguale a 11. Per un risultato precedente, deve appartenere alla sequenza un primo minore di 5, che può solo essere 3. Supponiamo per assurdo che nella sequenza compaia anche 11. Sostituendo 3 e 11 con 1, 4 e 9, incrementiamo il minimo comune multiplo in quanto $4 \cdot 9 > 3 \cdot 11$, in contraddizione con l'ottimalità della sequenza originale. Per quanto mostrato in precedenza, in una sequenza n-ottimale che contiene soltanto 1 e primi dispari, i primi devono essere consecutivi: questo esclude che in una tale sequenza compaia un primo maggiore di 11.

Come ultima osservazione, in una sequenza n-ottimale in cui compaiono soltanto 1 e primi dispari distinti, il numero 1 non può comparire più di una volta, altrimenti sostituendo due degli 1 con un 2 si incrementerebbe in minimo comune multiplo. Inoltre, se 3 compare in una tale sequenza, allora non può comparire 1, altrimenti sostituendo il 3 e l'1 con un 4 si incrementerebbe il minimo comune multiplo.

In definitiva, le uniche possibili sequenze ottimali cercate sono (1), (3), $(3, 5)$, $(3, 5, 7)$. Si verifica facilmente che sono tutte effettivamente ottimali, quindi gli n cercati sono 1, 3, 8, 15.