OliMaTO 10

Simulazione Gara Nazionale a Squadre 2024

- Per ogni problema indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Alcuni problemi ritenuti più impegnativi dagli autori sono contrassegnati da una o due stelle ([$\star$] o [$\star\star$]).
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2,2360 \qquad \sqrt{7} \approx 2,6458 \qquad \pi \approx 3,1415.$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly.
- **30 minuti dall'inizio:** scadenza per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

Testi a cura di: Lorenzo Capponi, Giulio Cosentino, Jiakai Hu, Tommaso Pignatelli, Antonio Polignano
Ambientazione a cura di: Lorenzo Capponi

1. *Intro*: l'era glaciale

Paleolitico, circa 20000 anni fa. Un'era glaciale sta per abbattersi sulla Terra, e uno scoiattolo dai denti a sciabola di nome Scrat vuole mettere da parte una scorta di cibo. Nel tentativo di sotterrare una ghianda, provoca la rottura di un ghiacciaio la cui superficie è un quadrilatero convesso $ABCD$: compaiono delle crepe lungo le diagonali AC e BD, che si intersecano in E. Prima di precipitare, Scrat fa appena in tempo a notare che AB e BE misurano 50 metri, CE e CD misurano 70 metri, BC misura 110 metri. Qual è la misura di AE in metri?

Soluzione: la risposta è 67.

Detta H la proiezione di B su AE, vale $AH = HE$ in quanto ABE è isoscele. Applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli BHE e BHC otteniamo il sistema

$$\begin{cases} BH^2 + HE^2 = 50^2 \\ BH^2 + (HE + 70)^2 = 110^2, \end{cases}$$

da cui ricaviamo $HE = \frac{235}{7}$ e dunque $AE = \frac{470}{7} \approx 67,14$.

2. Gli umani sono disgustosi

Il bradipo Sid, il mammut Manny e la tigre dai denti a sciabola Diego si sono imbattuti in un neonato umano e hanno promesso di riportarlo sano e salvo al villaggio della sua famiglia. I tre sono disperati, perché il bambino continua a piangere: per intrattenerlo, Sid comincia a elencare i termini della successione di numeri reali $a_0, a_1, a_2, \dots$ tale che $a_{n+1} = a_n^2 - 42$ per ogni $n \geq 0$. Quando Sid pronuncia il valore di a_{2024}, che è 0, finalmente le grida del neonato si placano. Detto M il massimo valore possibile di a_0, qual è la parte intera di $100M$?

Soluzione: la risposta è 699.

Dalla relazione di ricorrenza ricaviamo che

$$\begin{aligned}
a_{2023} &= \pm\sqrt{42 + a_{2024}} = \pm\sqrt{42} \\
a_{2022} &= \pm\sqrt{42 + a_{2023}} = \pm\sqrt{42 \pm \sqrt{42}} \\
a_{2021} &= \pm\sqrt{42 + a_{2022}} = \pm\sqrt{42 \pm \sqrt{42 \pm \sqrt{42}}} \\
&\dots \\
a_0 &= \underbrace{\pm\sqrt{42 \pm \sqrt{42 \pm \sqrt{42 \pm \dots}}}}_{\text{2024 radicali annidati}}.
\end{aligned}$$

Chiaramente, il massimo valore si ottiene quando tutti i segni sono $+$. Ora, poniamo

$$x = \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}}}$$

con infiniti radicali annidati e notiamo che $x = \sqrt{42 + x}$, la cui unica soluzione è $x = 7$; pertanto, il massimo valore di a_0 sarà di molto poco inferiore a 7. Utilizzando le approssimazioni fornite di $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, si può verificare che $\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42}}} > 6,99$, quindi la risposta è 699.

3. Taekwon-dodo

Sid, Manny e Diego hanno trovato un'anguria con cui nutrire il bambino, ma un dodo l'ha rubata e ora Sid lo insegue. Inizialmente i due si trovano sui vertici opposti di un ottaedro regolare: entrambi cominciano a muoversi alla stessa velocità, lungo uno spigolo a caso tra i quattro adiacenti al proprio vertice di partenza. Ogni volta che uno dei due raggiunge un vertice, sceglie a caso su quale spigolo continuare il proprio tragitto, eventualmente quello appena percorso. Sid e il dodo possono incontrarsi su uno dei vertici oppure nel punto medio di uno spigolo. Qual è la probabilità che si incontrino per la prima volta nel punto medio di uno spigolo? *Rispondere con le prime quattro cifre dopo la virgola.*

Soluzione: la risposta è 1818.

Prima di ogni spostamento, ci sono due situazioni possibili: o Sid e il dodo si trovano su vertici opposti dell'ottaedro, oppure su vertici adiacenti. Sia $p_{opposti}$ la probabilità che Sid e il dodo si incontrino per la prima volta nel punto medio di uno spigolo partendo da vertici opposti, e sia $p_{adiacenti}$ la stessa probabilità ma partendo da vertici adiacenti.

Se Sid e il dodo sono su vertici opposti, tra le 16 possibili coppie di spostamenti (4 per Sid e 4 per il dodo) ce ne sono 0 per cui i due si incontrano su uno spigolo, 4 per cui si incontrano su un vertice, 4 per cui si ritrovano ancora su vertici opposti, 8 per cui si ritrovano su vertici adiacenti: questo si traduce nell'equazione

$$p_{opposti} = \frac{4}{16}p_{opposti} + \frac{8}{16}p_{adiacenti}.$$

Se Sid e il dodo sono su vertici adiacenti, tra le 16 possibili coppie di spostamenti ce ne sono 1 per cui i due si incontrano su uno spigolo, 2 per cui si incontrano su un vertice, 2 per cui si ritrovano ancora su vertici opposti, 11 per cui si ritrovano su vertici adiacenti: questo si traduce nell'equazione

$$p_{adiacenti} = \frac{1}{16} + \frac{2}{16}p_{opposti} + \frac{11}{16}p_{adiacenti}.$$

Mettendo le due equazioni a sistema si ricava $p_{opposti} = 2/11 \approx 0,1818$.

4. Scivolo di ghiaccio

Sid, Manny, Diego, il bambino e Scrat stanno scivolando in un tunnel di ghiaccio. A un certo punto il tunnel si divide in 15 cunicoli affiancati $c_1, c_2, \dots, c_{15}$: ciascuno tra Sid, Manny, Diego, il bambino e Scrat imbocca un cunicolo a caso, in modo tale da finire tutti in cunicoli diversi. Qual è la probabilità che, per ogni coppia di cunicoli (c_i, c_j) tra i cinque cunicoli scelti, la quantità $|i - j|$ sia un numero pari? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 40.

Osserviamo che la condizione che $|i - j|$ sia sempre pari equivale alla condizione che gli indici dei cunicoli scelti siano tutti pari o tutti dispari. Poiché ci sono 8 cunicoli di indice dispari e 7 di indice pari, la probabilità cercata è

$$\frac{\binom{8}{5} + \binom{7}{5}}{\binom{15}{5}} = \frac{1}{39}.$$

5. Numeri rupestri [$\star$]

Sid, Manny, Diego e il bambino, addentratisi in una caverna, vedono scritti su una parete rocciosa i numeri 1, 4, 6. Sid, che si distrae facilmente, decide di scrivere altri numeri sulla parete secondo il seguente criterio: ogni nuovo numero scritto deve essere diverso da tutti quelli già scritti e deve essere della forma $abc + ab + bc + ca + a + b + c$, dove a, b, c sono tre numeri distinti già presenti sulla parete. Per esempio, il primo numero scritto da Sid sarà necessariamente $1 \cdot 4 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 1 + 4 + 6 = 69$. Dopo aver scritto 2024 numeri distinti, Sid si accorge che nessuno dei numeri sulla parete finisce per 99. Quanti sono i diversi insiemi di numeri che Sid potrebbe aver scritto?

Soluzione: la risposta è 2024.

Notiamo che $1 = 2^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 - 1$; $4 = 2^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 - 1$; $6 = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 - 1$; inoltre

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1.$$

Segue che i numeri scritti da Sid sono tutti della forma $2^a \cdot 5^b \cdot 7^c - 1$. In particolare, affinché un numero non finisca per 99 almeno uno tra l'esponente del 2 e l'esponente 5 deve essere minore di 2.

Poiché ogni nuovo numero deve essere ottenuto da tre numeri distinti già presenti, il primo numero scritto è necessariamente $2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 - 1$. Dopodiché, per evitare di scrivere un numero che finisce per 99 le uniche possibilità sono scegliere

$$\begin{aligned} a &= 2^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 - 1 \\ b &= 2^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 - 1 \\ c &= 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 - 1 \end{aligned}$$

ottenendo $2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 - 1$, oppure

$$\begin{aligned} a &= 2^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 - 1 \\ b &= 2^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 - 1 \\ c &= 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 - 1 \end{aligned}$$

ottenendo $2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2 - 1$.

Continuando a ragionare in questo modo, deduciamo che l'unica possibilità è scrivere i primi k numeri della sequenza

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \\ 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \\ 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^4 \\ \dots \\ 2^{2024} \cdot 5^1 \cdot 7^{2024} \end{aligned}$$

e primi $2023 - k$ numeri della sequenza

$$\begin{aligned} 2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \\ 2^1 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \\ 2^1 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \\ \dots \\ 2^1 \cdot 5^{2024} \cdot 7^{2024}, \end{aligned}$$

per un $0 \leq k \leq 2023$ a scelta. Dunque, ci sono 2024 diversi insiemi di numeri che è possibile scrivere.

6. Parco giochi

Dopo la migrazione, Sid ha allestito un parco giochi. Il biglietto di accesso si paga in bacche: nella valle crescono rametti con un numero di bacche che in notazione decimale si scrive utilizzando soltanto cifre 1, quindi 1 bacca, oppure 11, o 111 e così via. Il prezzo stabilito da Sid deve poter essere pagato utilizzando rametti con quantità di bacche tutte distinte: per esempio, i cinque più piccoli prezzi possibili sono 1, 11, 12, 111, 112. Sid decide di fissare come tariffa il 111-esimo più piccolo prezzo possibile: quante bacche occorre pagare?

Soluzione: la risposta è 3456.

L'osservazione fondamentale è che per ogni k vale $1+11+\ldots+\underbrace{1\ldots1}_{k \text{ cifre}} < \underbrace{1\ldots1}_{k+1 \text{ cifre}}$. Inoltre, una proprietà analoga vale per le potenze di 2: $2^0+2^1+\ldots+2^k < 2^{k+1}$. Questo ci permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i possibili prezzi e l'insieme dei numeri interi positivi scritti come somma di potenze di 2 distinte, ovvero in base 2.

Poiché $111_{10} = 1101111_2$, il 111-esimo più piccolo prezzo possibile è

$$1111111+111111+1111+111+11+1 = 1223456.$$

7. Serpenti a sonagli

Diego e Sid incontrano in un bosco due opossum dispettosi, Eddie e Crash, che iniziano a colpirli con delle cerbottane. La tigre e il bradipo tentano di catturarli, ma non riescono ad acciuffarli a causa della loro agilità. Sconfitto e umiliato, Diego bisbiglia a Sid: "Se qualcuno chiede, eravamo circondati da n serpenti a sonagli". "Quanti, precisamente?" chiede Sid. "n è il più piccolo intero positivo multiplo di 2023 che possiede esattamente 2023 divisori positivi, inclusi 1 e se stesso". Qual è l'esponente della più grande potenza di 7 che divide n?

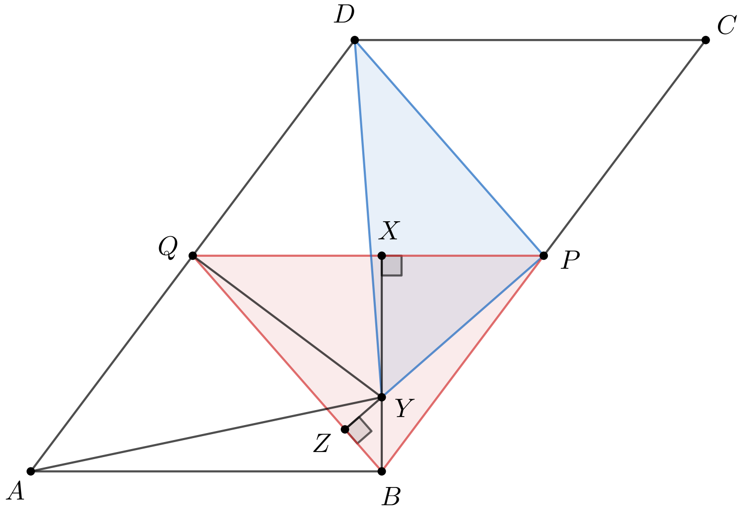
Soluzione: la risposta è 16.

Ricordiamo che la quantità di divisori di un numero è uguale al prodotto degli esponenti aumentati di 1 dei suoi fattori primi. Poiché $2023 = 7\cdot17^2$, certamente nella fattorizzazione di n devono comparire 7 e 17. Senza utilizzare altri fattori primi, il minimo n possibile è $7^{17^2-1}\cdot17^{7-1} = 7^{288}\cdot17^6$. Tuttavia, è possibile ottenere un n minore utilizzando il fattore 2 in questo modo: $2^{16}\cdot7^{16}\cdot17^6$. Poiché 2023 è il prodotto di solo tre numeri primi (contando il 17 due volte), non possono comparire più di tre fattori primi nella fattorizzazione di n. Pertanto, $n = 2^{16}\cdot7^{16}\cdot17^6$ e la risposta è 16.

8. Equilibrio precario [⋆⋆]

Per attraversare un crepaccio, Manny, Ellie, Diego, Crash ed Eddie devono camminare su una roccia pericolante a forma di parallelogramma $ABCD$ con $\widehat{ABC}$ ottuso. Manny ed Ellie si trovano nei punti medi P e Q rispettivamente di BC e AD; Diego giace nel punto X sul segmento PQ tale che $PX = 3$, $BX = 4$, $BP = 5$; infine, per mantenere il masso in equilibrio, Eddie e Crash devono posizionarsi nel punto Y sul segmento BX tale che $AY = DY$. Qual è il massimo valore possibile del rapporto tra l'area del triangolo BPQ e l'area del triangolo DYP? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 7.



La prima osservazione principale è che Y è l'ortocentro di BPQ: infatti, da $BX^2+PX^2 = BP^2$ segue $BX \perp PQ$ e per ipotesi Y giace sull'asse di AD, quindi $QY \perp BP$. Dunque, detta Z l'intersezione tra BQ e la retta PY, si ha $PZ \perp BQ$; inoltre, essendo $BQ \parallel PD$, si ha anche $YP \perp PD$.

L'area di DYP si può esprimere come $\frac{1}{2}PD\cdot PY$, mentre l'area di BPQ si può esprimere come $\frac{1}{2}BQ\cdot PZ$. Essendo $BQ = PD$, il rapporto tra le due aree è uguale al rapporto tra PY e PZ.

Siano α la misura di $\widehat{BPZ}$ e β la misura di $\widehat{QPZ}$. Osserviamo che $PZ = PB\cos\alpha = 5\cos\alpha$ e che $PY = PX/\cos\beta = 3/\cos\beta$. Allora

$$\frac{PZ}{PY} = \frac{5\cos\alpha\cos\beta}{3} = \frac{5(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))}{6}.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato una delle formule di Werner.
Poiché $\alpha+\beta$ è l'ampiezza di $\widehat{BPX}$, vale $\cos(\alpha+\beta)=3/5$. Per massimizzare $\cos(\alpha-\beta)$ poniamo $\alpha=\beta$ e otteniamo $\cos(\alpha-\beta)=1$. Allora il massimo valore del rapporto cercato è

$$\frac{5(3/5+1)}{6}=\frac{4}{3}.$$

9. Campo minato

Per raggiungere la "barca" e sopravvivere all'alluvione, il gruppo costituito da Manny, Ellie, Diego, Crash ed Eddie deve attraversare una zona piena di geyser numerati con tutti i divisori interi positivi del minimo comune multiplo di $1,2,\dots,30$. I cinque amici sanno che i geyser pericolosi sono quelli il cui numero associato è divisibile per esattamente 28 tra gli interi da 1 a 30. Quanti sono i geyser pericolosi?

Soluzione: la risposta è 23.

Il minimo comune multiplo dei numeri da 1 a 30 è $m=2^4\cdot3^3\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29$. Innanzitutto, i divisori di m che sono divisibili per esattamente 29 dei numeri dell'insieme $\{1,2,\dots,30\}$ sono $m/2, m/3, m/5, m/17, m/19, m/23, m/29$. Ora, notiamo che i numeri del tipo $\frac{m}{p_1p_2}$ sono divisibili per 28 numeri dell'insieme $\{1,2,\dots,30\}$, dove p_1 e p_2 sono elementi distinti di $\{2,3,5,17,19,23,29\}$: ci sono $\binom{7}{2}=21$ numeri di questo tipo. Oltre a questi, $k/11$ e $k/13$ sono gli unici numeri che verificano la proprietà richiesta. La risposta è $21+2=23$.

10. Re del fuoco

Sid è stato rapito da una tribù di bradipi, che lo hanno proclamato "Re del fuoco" e inneggiano a lui. Sid nota che i bradipi sembrano obbedire a ogni suo ordine. Allora, per metterli alla prova, scrive un numero intero positivo in notazione decimale (ossia, scegliendo tra le cifre da 0 a 9) e chiede ai bradipi di interpretarlo prima in base 20 e poi in base 13. Per esempio, se Sid avesse scritto 24 i bradipi leggerebbero i numeri $2\cdot20+4=44$ interpretando in base 20 e $2\cdot13+4=30$ interpretando in base 13. Il numero scritto da Sid è tale che i due numeri letti dagli altri due bradipi siano uno il doppio dell'altro: qual è il numero scritto da Sid?

Soluzione: la risposta è 198.

Sia n il numero cercato. Chiaramente n ha più di una cifra. Supponendo che abbia due cifre, cerchiamo a,b tali che $20a+b=2(13a+b)$, ovvero $6a+b=0$, che però non ha soluzioni. Poniamo allora $n=400a+20b+c=2(169a+13b+c)$, ovvero $62a=6b+c$. L'unica soluzione possibile è $a=1$, $b=9$, $c=8$. Non è difficile verificare che per quattro o più cifre non ci sono soluzioni.

11. Mammut in migrazione

Per anni, Manny ha temuto di essere l'ultimo esemplare della sua specie. Tuttavia, ora non solo ha conosciuto la mammut femmina Ellie, ma i due hanno anche incontrato un branco di 14 mammut. Gli individui di questo branco, quando migrano, si numerano da 1 a 14 e si dispongono in fila indiana, in modo per ogni $2\le k\le14$ il mammut numero k si trovi più indietro nella fila rispetto al mammut $\lfloor k/2\rfloor$. Una volta stabilita la numerazione, in quanti modi possono disporsi in fila questi mammut?

Soluzione: la risposta è 5600.

Calcoliamo la probabilità che, presa una permutazione casuale, questa verifichi le condizioni richieste. Devono verificarsi i seguenti eventi, e l'osservazione fondamentale è che sono indipendenti tra loro:

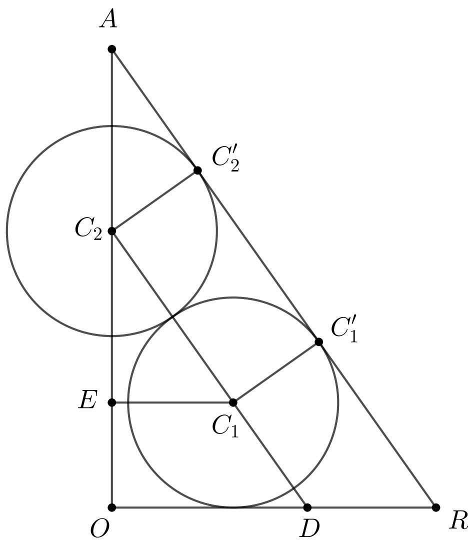
- 1 deve essere al primo posto, il che accade con probabilità $1/14$;
- 2 deve precedere 4, 5, 8, 9, 10, 11, il che accade con probabilità $1/7$;
- 3 deve precedere 6, 7, 12, 13, 14, il che accade con probabilità $1/6$;
- 4 deve precedere 8 e 9, il che accade con probabilità $1/3$;
- 5 deve precedere 10 e 11, il che accade con probabilità $1/3$;
- 6 deve precedere 12 e 13, il che accade con probabilità $1/3$;
- 7 deve precedere 14, il che accade con probabilità $1/2$.

La probabilità che tutti questi eventi si verifichino contemporaneamente è uguale al prodotto delle probabilità, che è $\frac{1}{31752}$. Questo equivale a dire che le permutazioni valide sono $\frac{14!}{31752}=2745600$.

12. Surrogazione di maternità [$\star$]

In una caverna, Sid ha trovato quattro uova sferiche di raggio 30 centimetri. Sentendosi pronto a diventare genitore, il bradipo decide di portarle in superficie e accudirle fino alla schiusa. Costruisce un nido a forma di cono circolare retto, e posiziona le quattro uova al suo interno in modo che ciascuna sia tangente alle altre tre e alla superficie laterale del cono, e che tre uova siano tangenti anche al cerchio di base del cono. Quanti centimetri misura l'altezza del cono?

Soluzione: la risposta è 130.



Sia O il centro della base del cono. Consideriamo un piano passante per O, perpendicolare alla base del cono e tangente a due delle tre sfere che sono tangenti alla base. Questo piano passa per i centri delle altre due sfere: siano C_1 il centro di quella che è tangente alla base e C_2 il centro di quella non lo è. Detti A il vertice del cono e R il punto di intersezione tra il piano, la base del cono e la superficie laterale del cono, la figura soprastante rappresenta le sezioni del cono e delle due sfere individuate dal piano.

Siano C_1' e C_2' i punti di tangenza delle circonferenze di centri rispettivamente C_1 e C_2 con il segmento AR. Siano infine $D = C_1C_2 \cap OR$ e E l'intersezione tra AO e la retta parallela a OR passante per C_1.

Considerando che nella figura iniziale i centri delle sfere sono i vertici di un tetraedro regolare di spigolo 60, segue che EC_1 è la lunghezza del segmento che unisce un vertice al baricentro di un triangolo equilatero (base del tetraedro): da questo ricaviamo $EC_1 = 20\sqrt{3}$, e poi dal Teorema di Pitagora otteniamo $C_2E = 20\sqrt{6}$ (sappiamo infatti che $C_1C_2 = 60$).

Essendo $EO = 30$, resta da calcolare AC_2. Notando che i triangoli AC_2C_2' e C_2EC_1 sono simili e sapendo $C_2C_2' = 30$, impostando un'opportuna proporzione ricaviamo $AC_2 = 30\sqrt{3}$.

La lunghezza dell'altezza del cono, in centimetri, è

$$OE + EC_2 + C_2A = 30 + 20\sqrt{6} + 30\sqrt{3}.$$

Con le approssimazioni fornite si ottiene che la risposta è 130.

13. Dente della discordia

Mamma T-Rex ha portato Sid nel suo nido, scambiandolo per uno dei suoi cuccioli. Manny, Ellie, Diego, Crash ed Eddie, alla ricerca del loro amico disperso, improvvisamente si ritrovano circondati da molti dinosauri pericolosi; vengono salvati da uno scaltro furetto di nome Buck, che brandisce un coltello la cui lama è una zanna di dinosauro. "La forma della lama è un triangolo ABC con $AC = 7$ cm; sul lato AB si trova un punto D tale che $AD = BD = CD = 5$ cm. Per sopravvivere nel mondo dei dinosauri, dovete calcolare qual è la misura di BC^2 in centimetri quadrati."

Soluzione: la risposta è 51.

Consideriamo la circonferenza di centro D e raggio AD, che passa per A, C, B. Poiché AB è un diametro, l'angolo $\widehat{ACB}$ è retto. Per il Teorema di Pitagora, vale

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 100 - 49 = 51.$$

14. Leccata investigativa [$\star\star$]

"Un nostro amico è stato rapito da un dinosasuro" spiega Ellie a Buck, "puoi aiutarci a ritrovarlo?". Dopo aver leccato una grossa impronta, Buck dichiara: "Mamma T-Rex è passata di qui, con i suoi cuccioli e un essere moscio verde. Hanno percorso esattamente k miglia fino alle cascate di lava.". "Quanta strada dobbiamo percorrere?" chiede Manny. "k è un intero positivo minore o uguale a 2024, diverso da 17 e 18, per cui esiste un intero positivo n tale che $n/17$ è la 17-esima potenza di un intero, $n/18$ è la 18-esima potenza di un intero, e n/k è la k-esima potenza di un intero." "Sei riuscito a capire tutto questo con una leccata?" domanda Diego, perplesso. "No, ho visto passare Mamma T-Rex qualche giorno fa". Quanti sono i possibili valori di k?

Soluzione: la risposta è 655.

Dimostriamo che un intero positivo $k \leq 2024$ verifica le ipotesi richieste se e solo se vale (almeno) una delle seguenti due condizioni:

- k è coprimo con 17 e 18;
- $k/2$ è un quadrato perfetto coprimo con 3 e 17.

Supponiamo che k sia coprimo con 17 e 18. Occorre risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} n = 17 \cdot a^{17} \\ n = 18 \cdot b^{18} \\ n = k \cdot c^k, \end{cases}$$

con a, b, c interi positivi. Un sistema di questo tipo equivale a un sistema di congruenze per ciascuno degli esponenti della fattorizzazione in primi di n. Per esempio, detto e_1 l'esponente del 2, per la prima equazione e_1 deve essere congruo a 0 modulo 17; per la seconda equazione, che si può riscrivere come $n = 2 \cdot 3^2 \cdot b^{18}$, e_1 deve essere congruo a 1 modulo 18; per la terza equazione, nell'ipotesi che k sia coprimo con 17 e 18 (in particolare dispari), e_2 deve essere congruo a 0 modulo k. Il Teorema Cinese del Resto assicura l'esistenza di una soluzione per ogni possibile terna di congruenze, se $k, 17, 18$ sono a due a due coprimi. Si può ragionare nello stesso modo per gli esponenti di tutti gli altri fattori primi di n.

Ora supponiamo $k = 2r^2$ per qualche r intero coprimo con 3 e 17. Occorre risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} n = 17 \cdot a^{17} \\ n = 18 \cdot b^{18} \\ n = 2r^2 \cdot c^{2r^2}, \end{cases}$$

con a, b, c interi positivi. Detto e_1 l'esponente del 2 nella fattorizzazione di n, per la prima equazione e_1 deve essere congruo a 0 modulo 17; per la seconda equazione vale $e_1 \equiv 1 \pmod{18}$; per la terza vale $e_1 \equiv 1 \pmod{2r^2}$. Se r è coprimo con 3 e 17, questo sistema di congruenze ha sempre soluzioni. Per considerazioni analoghe, anche per gli esponenti di altri fattori primi si ottiene un sistema di congruenze risolvibile.

Resta da dimostrare che i k descritti sono gli unici validi. Supponiamo che k sia multiplo di 17 e sia q un primo che divide k. Detto e l'esponente della più grande potenza di q che divide k, deve valere

$$\begin{cases} n = 17 \cdot a^{17} \\ n = 18 \cdot b^{18} \\ n = 17q^e \cdot t \cdot c^{17q^e t}, \end{cases}$$

dove nella terza equazione t indica $\frac{k}{17q^e}$. Detto e' l'esponente della massima potenza di q che divide n, per la prima equazione deve valere $e' \equiv 0 \pmod{17}$, mentre per la terza deve valere $e' \equiv e \pmod{17q^e}$. L'unica possibilità è che q^e sia una potenza 17-esima, il che esclude ogni valore di k minore o uguale a 2024. Con ragionamenti analoghi sui fattori primi 2 e 3 otteniamo la tesi.

Infine, contiamo quanti sono i k che verificano le condizioni trovate. Per contare quelli coprimi con 17 e 18, ossia coprimi con 2, 3 e 17, sfruttiamo il principio di inclusione-esclusione e troviamo che ce ne sono 635. I valori k tali che $k/2$ è un quadrato perfetto coprimo con 3 e 17 sono 20, tra quelli non ancora contati.

La risposta è $635 + 20 = 655$.

15. Abisso della Morte

Per attraversare l'Abisso della Morte, Buck ha costruito una rudimentale funivia con la gigantesca cassa toracica di dinosauro. Ci sono 16 animali, le cui masse misurano 1, 2, 3, ..., 16 unità, che vogliono attraversare l'Abisso. Affinché la funivia funzioni correttamente, non possono salire a bordo due animali per cui la somma delle due masse sia un multiplo di 17. Quanti diversi insiemi non vuoti di animali possono salire a bordo?

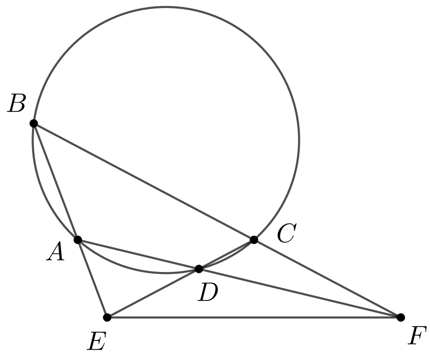
Soluzione: la risposta è 6560.

Consideriamo i due animali di masse rispettivamente 1 e 16 unità. Ovviamente non possono salire entrambi sulla funivia, quindi può salire il primo, o il secondo, o nessuno dei due, per un totale di 3 possibilità. Applicando lo stesso ragionamento agli animali di masse 2 e 15, poi 3 e 14, e così via fino a quelli di masse 8 e 9, otteniamo un totale di 3^8 scelte possibili. Senza considerare l'insieme vuoto, i possibili insiemi sono $3^8 - 1 = 6560$.

16. Derivata dei continenti

Scrat innesca accidentalmente una catastrofe planetaria che provoca la derivata dei continenti: Manny, Sid e Diego si ritrovano separati dalla terraferma, isolati su un iceberg galleggiante la cui superficie ha la forma di un triangolo BEF. I punti A e C si trovano sui lati BE e BF in modo che, detta D l'intersezione tra i segmenti AF e CE, il quadrilatero $ABCD$ sia inscrivibile in una circonferenza e abbia misure $AB = 6$ metri, $BC = 12$ metri, $CD = 3$ metri, $DA = 6$ metri. Qual è la misura di EF in centimetri?

Soluzione: la risposta è 1414.



Dalla ciclicità di $ABCD$ segue che i triangoli EDA e EBC sono simili, con rapporto di similitudine pari a $AD/BC = 1/2$; analogamente FCD e FAB sono simili con rapporto di similitudine pari a $CD/AB = 1/2$. Impostando opportune proporzioni tra i lati di questi triangoli ricaviamo $AE = 4$, $DE = 5$, $FC = 8$, $DF = 10$.

Ora esprimiamo la lunghezza di EF in due modi diversi applicando il teorema del coseno ai triangoli EBF e EDF:

$$\begin{cases} EF^2 = BE^2 + BF^2 - 2BE \cdot BF \cos \widehat{ABC} \\ EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos \widehat{EDF}. \end{cases}$$

Ora sostituiamo i valori noti e notiamo che $\cos \widehat{ABC} = -\cos \widehat{EDF}$ in quanto i due angoli sono supplementari. Otteniamo un sistema nelle due incognite EF e $\cos \widehat{ABC}$, da cui ricaviamo che la misura di EF in metri è $10\sqrt{2}$.

17. Un canto(r) seducente [$\star$]

In mezzo al mare, Manny, Diego, Sid e la sua nonnina si imbattono in un gruppo di sirene, che li ammaliano con il loro canto, proponendo loro di risolvere l'equazione

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8) = (x-3)(x-6)(x-9),$$

che ha 6 soluzioni reali distinte. Per ciascuna soluzione λ, i quattro devono calcolare l'espressione $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$ e poi sommare i sei risultati ottenuti. Qual è il valore finale che ricavano?

Soluzione: la risposta è 273.

Siano

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8) = x^6 - a_5x^5 + a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$$
$$q(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8) - (x-3)(x-6)(x-9) = x^6 - b_5x^5 + b_4x^4 - b_3x^3 + b_2x^2 - b_1x + b_0.$$

Chiamiamo s_1, s_2, s_3 le somme delle potenze rispettivamente prime, seconde e terze delle radici di $p(x)$; analogamente chiamiamo t_1, t_2, t_3 le somme delle potenze rispettivamente prime, seconde e terze delle radici di $q(x)$.

Notiamo che $a_5 = b_5$, $a_4 = b_4$, $a_3 = b_3 + 1$. Dalle formule di Viète ricaviamo

$$\begin{aligned} s_1 &= a_5 \\ s_2 &= 2a_4 - s_1^2 = 2a_4 - a_5^2 \\ s_3 &= \frac{3}{2}s_1 s_2 - \frac{1}{2}s_1^3 + 3a_3. \end{aligned}$$

In particolare, s_1 e s_2 dipendono solo da a_5 e a_4, e lo stesso accade per t_1 e t_2 rispetto a b_4 e b_5: quindi $t_1 = s_1$ e $s_2 = t_2$. Inoltre, grazie alla terza equazione otteniamo $t_3 = s_3 - 3$.

Ora osserviamo che, poiché $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8$, l'espressione richiesta è

$$t_3 - 7t_2 + 14t_1 - 8 = (s_3 - 3) - 7s_2 + 14s_1 - 8.$$

Dette $r_1, \ldots, r_6$ le radici di $p(x)$, possiamo scrivere

$$(s_3 - 3) - 7s_2 + 14s_1 - 8 = -3 + \sum_{i=1}^{6}(r_i - 1)(r_i - 2)(r_i - 4).$$

Ora basta calcolare questa espressione sostituendo i valori $1, 2, 4, 5, 7, 8$. La risposta è 273.

18. Astronave ibernata [$\star$]

Senza volerlo, Scrat mette in moto un'astronave intrappolata nel ghiaccio: per tentare di controllarla, ha a disposizione un pannello con 32 pulsanti blu e 32 pulsanti rossi. Lo scoiattolo decide di premere contemporaneamente una quantità $4k$ di pulsanti, di cui $2k$ rossi e $2k$ blu, per qualche $0 \leq k \leq 16$. In quanti modi può Scrat scegliere quali pulsanti premere? *Dare come risposta il prodotto dei quattro più piccoli numeri primi che dividono il risultato.*

Soluzione: la risposta è 1938.

La quantità cercata è

$$\binom{32}{0}^2 + \binom{32}{2}^2 + \binom{32}{4}^2 + \ldots + \binom{32}{32}^2.$$

Numeriamo i pulsanti rossi blu e i pulsanti blu da 1 a 32: il problema consiste dunque nel contare quante sono le coppie (R, B) di sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 32\}$ tali che $|R| = |B|$ è pari. È noto che

$$\binom{32}{0}^2 + \binom{32}{1}^2 + \binom{32}{2}^2 + \ldots + \binom{32}{32}^2 = \binom{64}{32},$$

quindi senza la restrizione di parità le coppie possibili sono $\binom{64}{32}$. Per calcolare la differenza tra la quantità di coppie con cardinalità pari e la quantità di coppie con cardinalità dispari, consideriamo una funzione iniettiva che associ a ogni coppia con cardinalità dispari una coppia con cardinalità pari.

Definiamo la funzione in questo modo: data una coppia (R, B) con $|R| = |B|$ dispari, consideriamo

$$x = \min\{(R \cap B) \cup (\{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (R \cup B))\};$$

in altre parole, consideriamo il più piccolo elemento di $\{1, 2, \ldots, 32\}$ tra quelli che appartengono a entrambi gli insiemi R e B oppure non appartengono a nessuno dei due. Se questo elemento x appartiene a R e B, associamo alla coppia (R, B) la coppia $(R \setminus \{x\}, B \setminus \{x\})$, ossia rimuoviamo l'elemento x da entrambi gli insiemi; altrimenti, se x non appartiene a R e B, associamo alla coppia (R, B) la coppia $(R \cup \{x\}, B \cup \{x\})$, ossia aggiungiamo l'elemento x a entrambi gli insiemi.

La funzione è ben definita perché essendo $|R| = |B| =$ dispari non è possibile che $(R \cap B)$ e $\{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (R \cup B)$ siano entrambi vuoti; inoltre è chiaramente iniettiva. Non è però suriettiva: tra le coppie di insiemi con cardinalità pari, non hanno controimmagine tutte le coppie (R, B) tali che $(R \cap B)$ e $\{1, 2, \ldots, 32\} \setminus (R \cup B)$ sono entrambi vuoti, ossia quelle in cui R e B sono una partizione di $\{1, 2, \ldots, 32\}$. Queste coppie sono $\binom{32}{16}$. Sapendo che le coppie totali sono $\binom{64}{32}$ e che la differenza tra la quantità di coppie di cardinalità pari e la quantità di coppie di cardinalità dispari è $\binom{32}{16}$, la risposta è

$$\frac{\binom{64}{32} + \binom{32}{16}}{2}.$$

I quattro più piccoli numeri primi che dividono questa quantità sono $2, 3, 17, 19$, quindi la risposta è $2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 = 1938$.

19. Pilastro di Tartaglia

Buck ha rinvenuto in un'antichissima caverna un pilastro scolpito, sulle cui pareti è rappresentato il Triangolo di Tartaglia. In ogni riga che contiene un numero dispari di numeri vi è un numero centrale: per esempio, i primi tre numeri centrali sono 1 nella riga 0, 2 nella riga 2, 6 nella riga 4. Allo scopo di formulare un piano per fermare l'asteroide in rotta di collisione con la Terra, Buck ha determinato che un numero centrale è *apocalittico* se 89 è il più grande primo di due cifre che lo divide. Qual è il 24-esimo più piccolo numero centrale apocalittico? *Dare come risposta il più grande numero primo che divide il risultato.*

Soluzione: la risposta è 457.

I numeri centrali sono tutti e soli i numeri della forma $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!}$. Osserviamo che l'unico primo di due cifre maggiore di 89 è 97. Il più piccolo numero centrale apocalittico è $\binom{90}{45}$, perché è il più piccolo divisibile per 89. Sono apocalittici anche $\binom{92}{46}$, $\binom{94}{47}$, $\binom{96}{48}$, mentre $\binom{98}{49}$ non lo è perché è divisibile per 97.

Il numero apocalittico successivo che non è divisibile per 97 è $\binom{194}{97}$, perché i due fattori 97 al numeratore si semplificano con i due fattori al denominatore; tuttavia, per lo stesso motivo questo numero non è divisibile nemmeno per 89. Il numero apocalittico successivo è il più piccolo numero centrale che ha tre fattori 89 al numeratore, ovvero $\binom{268}{134}$. Essendo $97 \cdot 3 = 291$, tutti i numeri centrali da $\binom{268}{134}$ a $\binom{290}{145}$ sono apocalittici: contando anche i quattro numeri apocalittici iniziali, per ora abbiamo trovato 16 numeri apocalittici.

Continuiamo a ragionare in questo modo: per trovare il numero apocalittico successivo devono esserci cinque fattori 89 al numeratore (se sono quattro si semplificano tutti con il denominatore), quindi essendo $89 \cdot 5 = 445$ il numero apocalittico successivo è $\binom{446}{223}$, che è complessivamente il 17-esimo. Il 24-esimo sarà quindi $\binom{460}{230}$ (che non è divisibile per 97 in quanto $97 \cdot 5 = 485 > 460$). Il più grande numero primo che lo divide è 457.

20. Geometropia

Il luogo dove cadde l'ultimo grande asteroide sulla Terra è oggi noto come Geometropia, su cui regna lo Shangri Lama. A causa del magnetismo delle rocce, qui gli animali non invecchiano mai e i frutti crescono molto velocemente. All'alba di un certo giorno, sull'albero sacro dello Shangri Lama ci sono 10 kg di frutta. Ogni pomeriggio lo Shangri Lama mangia x di grammi di frutta. Di notte, la massa di frutta sull'albero incrementa del 10%. Qual è il massimo valore intero di x per cui la frutta sull'albero non si esaurirà mai?

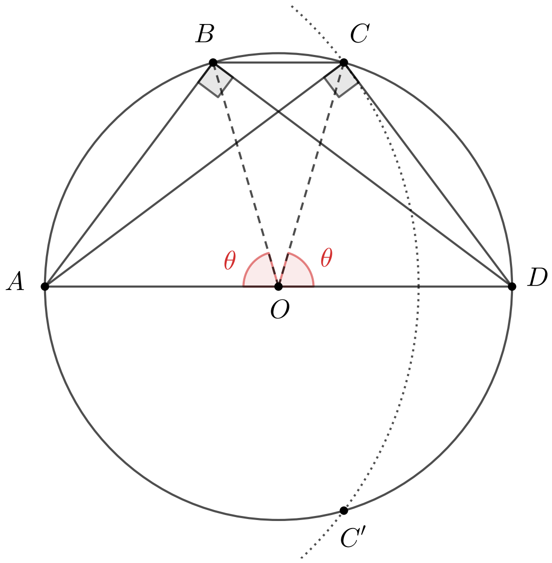
Soluzione: la risposta è 909.

Un valore x è valido se $\frac{11}{10}(10000 - x) \geq 10000$, ovvero $x \leq 10000/11 = 909,\overline{09}$. Dunque, il più grande valore possibile intero di x è 909.

21. *Outro*, rotta di collisione

Il piano per sventare la minaccia dell'asteroide consiste nel gettare dei cristalli magnetici in un vulcano, in modo da provocare un'eruzione che rispedisca l'asteroide nello spazio. La zona interessata è una circonferenza di raggio 5 km: i cristalli si trovano inizialmente nel punto A sulla circonferenza, e il cratere del vulcano giace in un punto B della circonferenza che dista 6 km da A. Il punto di impatto previsto per l'asteroide è un punto C sulla circonferenza, tale che A e C distino 8 km. Quanti metri distano B e C al minimo?

Soluzione: la risposta è 2800.



Sia O il centro della circonferenza e D l'altro estremo del diametro che passa per A. Fissato il punto B, le due possibili posizioni di C sono i punti C e C' indicati in figura: consideriamo quello più vicino a B.

Notiamo che $\widehat{ACB} = 90°$ in quanto AD è diametro, quindi $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Analogamente ricaviamo $BD = 8$: dunque, per simmetria $ABCD$ è un trapezio isoscele.

Sia θ la misura di $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$. Applicando il teorema del coseno al triangolo AOB ricaviamo $\cos\theta = 7/25$. Per calcolare la misura di BC applichiamo il teorema del coseno al triangolo BOC, dove $\widehat{BOC} = 180° - 2\theta$, sfruttando il fatto che

$$\cos(180° - 2\theta) = -\cos 2\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta = \left(\frac{24}{25}\right)^2 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{527}{625}.$$

Applicando il teorema del coseno al triangolo BOC si ricava che la misura di BC in km è $14/5$, quindi la risposta è 2800.