FUNZIONE $\zeta(s)$, NUMERI PRIMI, ESTENSIONE AL CAMPO COMPLESSO

Vale l'uguaglianza:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}} \quad (1)$$

$$\boxed{s = a + ib}$$

essendo $n^s = 10^{\log n^s} = 10^{\log(n^a \cdot n^{ib})} = 10^{(a \log n + ib \log n)}$ si ha:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a\left(\cos(b \log n) + i \operatorname{sen}(b \log n)\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(b \log n)}{n^a} - i\,\frac{\operatorname{sen}(b \log n)}{n^a}\right) \quad (2)$$

Dopo aver trasformato il secondo membro della (1) con lo stesso tipo di calcolo fatto per ottenere la (2) posso scrivere l'uguaglianza: (2)

$$Z = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(b\log n)}{n^a} - i\,\frac{\operatorname{sen}(b\log n)}{n^a}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{p_i^{2a}\cos^2(b\log p_i) - p_i^{a}\cos(b\log p_i) + i\left(p_i^{2a}\operatorname{sen}(b\log p_i) - p_i^{a}\operatorname{sen}(b\log p_i)\right)}{\left(p_i^{a}\cos(b\log p_i)-1\right)^2 + p_i^{2a}\operatorname{sen}^2(b\log p_i)\left(p_i^{a}\cos(b\log p_i)-1\right)^2 + p_i^{2a}\operatorname{sen}^2(b\log p_i)}\right)$$

~~USARE QUESTA PER TROVARE I PE... LA CONVERGENZA!!!~~ (3)

~~PER TROVARE UNA RELAZIONE TRA (p_i, a, b) UGUAGLIO I 2 MEMBRI DELLA (3) ~~A ZERO~~ (PARTE REALE CON PARTE REALE, PARTE IMMAGINARIA CON PARTE IMMAGINARIA)~~

~~RISCRIVERE I CONTI FATTI PER TROVARE ~~DELLA~~ LA PRODUTTORIA !!!~~

~~VOGLIO TROVARE GLI ZERI DELLA Z:~~

~~Ora ricontrollare il II° membro!!!...~~

~~Dalla (4) si ha:~~

$$\cancel{Z=0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(y\log n)}{n^x}+\frac{\operatorname{sen}(y\log n)}{n^x}\right)=0}$$

3

la $\zeta(s)$ ~~converge a zero~~ ~~dove converge dunque si ha:~~ converge:

~~la $\zeta(s)$ converge quando converge il suo modulo ossia~~

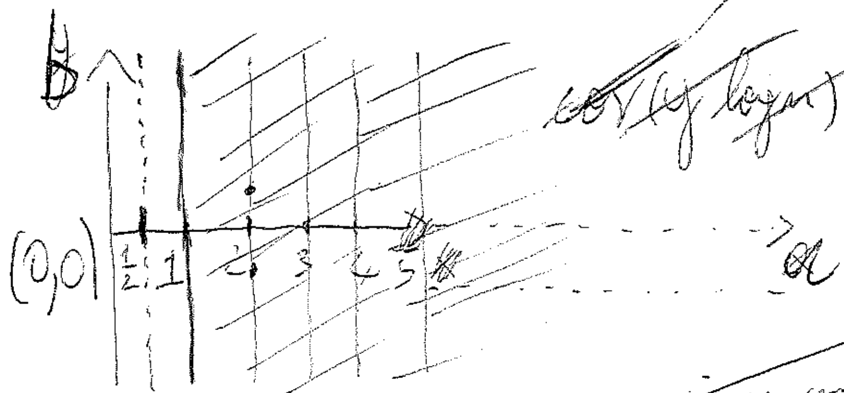
$$|\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow \boxed{\text{che converge per } \alpha>1}$$

Si cerca dunque di trovare un collegamento sui numeri primi senza risolvere l'ipotesi di Riemann, ma utilizzando soltanto l'estensione complessa senza il prolungamento!!!

~~N.B. rimangono esclusi gli zeri banali $a=-2x$ $x=1,2,\ldots$ del semiasse reale negativo???~~

Considero quindi la $z(s)$ nel I° e IV° quadrante con $\alpha > 1$: (4)

I° e IV° QUADRANTE $\rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta \gtrless 0 \end{cases}$



~~$\cos(y \log n) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y \log n)}$~~

~~in successione 1 punti SERVE ???~~

~~Provo a vedere se lungo le rette $x = h$ la z si annulla / ossia~~

~~$\boxed{x = 2}$~~

~~$z(s) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(y \log n) + \cos(y \log n)}{n^2} \right) = 0$~~

(I)

~~$\Rightarrow \text{sen}(y \log n) = -\cos(y \log n) \Rightarrow y \log n = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \boxed{y = \frac{3\pi}{4 \log n}}$~~ (5)

$\boxed{\text{N.B.}}$ ~~Perché rimane esclusa la retta critica? è esatto il mio prolungamento complesso ?? come studio la convergenza della serie (1) ??~~

~~come trovare somma parziale di (6)?~~

Provo a studiare l'andamento di $\underline{\operatorname{Re} z}$, $\underline{\operatorname{Im} z}$ per $\boxed{a = 2}$ (Il caso più semplice!!!) ($\underline{\text{zeri}}$, $\underline{\text{max}}$ e $\underline{\text{min}}$ ↳ punti notevoli di una funzione!) (5)

In corrispondenza degli eventuali $\underline{\text{zeri}}$, $\underline{\text{max}}$ e $\underline{\text{min}}$ le ~~due~~ funzioni a primo e secondo membro (di (3)) devono risultare uguali, dunque a seconda dei valori di b (per gli $\underline{\text{zeri}}$, $\underline{\text{max}}$ e $\underline{\text{min}}$) ottengo delle eq. per i P_i:

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(b\log n)}{n^2}\right) &= \prod_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{P_i^4\cos^2(b\log P_i) - P_i^2\cos(b\log P_i)}{\left(P_i^2\cos(b\log P_i)-1\right)^2 + P_i^4\operatorname{sen}^2(b\log P_i)}\right) \\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(b\log n)}{n^2}\right) &= \prod_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{P_i^2\operatorname{sen}(b\log P_i) - P_i^4\operatorname{sen}^2(b\log P_i)}{\left(P_i^2\cos(b\log P_i)-1\right)^2 + P_i^4\operatorname{sen}^2(b\log P_i)}\right) \end{aligned}\right\}$$

i valori di b per i quali convergono le serie sono gli stessi per i quali convergono le produttorie!!!! (4)

[N.B.] In ogni caso si devono prima trovare le somme infinite e i prodotti infiniti (di (4))!!! dopodiché si ~~qualunque~~ determinati b corrispondenti (con cui equivale) un insieme di numeri primi P_i!!!

~~Prima di passare a studiare la convergenza delle (4) voglio prima provare a fare il seguente ragionamento:~~ ← OK!

siccome vale la legge di annullamento del prodotto annullo i fattori generici a secondo membro delle (4): ~~[illegible] posso fare!!!~~

↓

è esatto come ragionamento???

$$\begin{cases} \cancel{P_i^2\cos(b\log P_i)\left(P_i^2-1\right)=0} \\ P_i^2\cos(b\log P_i)\left(P_i^2\cos(b\log P_i)-1\right)=0 & \text{I} \\ P_i^2\sin(b\log P_i)\left(1-P_i^2\sin(b\log P_i)\right)=0 & \text{II} \end{cases}$$

(5)

→ come lo risolvo???

~~da I ho:~~

$$\cancel{\cos(b\log P_i)=0 \Rightarrow b\log P_i=\frac{\pi}{2}+k\pi} \quad \text{~~sostituisco in II~~.}$$

$$\cancel{i=1 \rightarrow P_1=1}$$

$$\cancel{P_i^2\left(1-P_i^2\right)=0}$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Si può fare una verifica, nel senso che le I II devono valere solo per i primi P_i!!!

6

Riscrivo per esteso le (5) e provo a risolvere il sistema con WOLFRAM ALPHA :

$$\begin{cases} P_i^4 \cos^2(b \log P_i) - P_i^2 \cos(b \log P_i) = 0 & \text{III} \\ P_i^2 \operatorname{sen}(b \log P_i) - P_i^4 \operatorname{sen}^2(b \log P_i) = 0 & \text{IV} \end{cases}$$

7

si ottiene:

$$\boxed{b = \frac{8\pi n + \pi}{\ln 2} \qquad n \in \mathbb{N}}$$???? ~~[illegible]~~ !!!

Per ogni b dovrei ottenere un numero primo !!!! Adopero la IV :

$$-P_i^4 \operatorname{sen}^2\left(\overbrace{\frac{8\pi n + \pi}{\ln 2}}^{N} \ln P_i\right) + P_i^2 \operatorname{sen}\left(\overbrace{\frac{8\pi n + \pi}{\ln 2}}^{N} \ln P_i\right) = 0$$

$\begin{cases} n = 1 \to P_1 = 2 \\ i = 1 \end{cases}$ → i seni si annullano e l'uguaglianza è verificata !!! ; $\begin{cases} n = 2 \to P_2 = 3 \\ i = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} n = 3 \to P_3 = \\ i = 3 \end{cases}$ ↗ [vanno bene tutti i P_i anche quindi non P_i il discriminante è dato dalla III]

$\boxed{\text{N.B.}}$ è come se avessi usato il ln dall'inizio ossia dalla (2)

$$P_i^4 \cos^2\left(\frac{\overbrace{(8\pi n+\pi)}^{N}}{\ln 2}\ln P_i\right) - P_i^2 \cos\left(\frac{\overbrace{(8\pi n+\pi)}^{N}}{\ln 2}\ln P_i\right) = 0$$

$$\begin{cases} n=3 \rightarrow P_3 = 5 \\ i=3 \end{cases}$$

?