

Stage Senior Pisa 2024 – Test Iniziale

Tempo concesso: 150 minuti	Valutazione: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5
-----------------------------------	---

1. Determinare quante sono le coppie (a, b) di numeri reali positivi tali che

$$(2 + 3a)(1 + 2b)(3a + 4b) = 96ab.$$

- (A) Infinite (B) Più di due, ma un numero finito (C) Una (D) Due
(E) Nessuna

2. Determinare il più piccolo numero reale k tale che

$$a^2 + \frac{2}{b} + 3c \leq \sqrt{a^2 + k} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + c^2}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali con $b \neq 0$.

- (A) 14 (B) $\sqrt{13}$ (C) 6 (D) $\sqrt{14}$ (E) 13

3. Sia $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio a coefficienti reali. Sappiamo che le quattro radici di $p(x)$ (eventualmente complesse e contate con molteplicità) hanno tutte modulo (o valore assoluto) uguale a 1.

Determinare quale delle seguenti affermazioni è *sicuramente falsa*.

- (A) $a = 3$ (B) $a = c$ (C) $b = -\sqrt{5}$ (D) $c = \sqrt{2}$ (E) $b = \sqrt{31}$

4. Consideriamo il numero $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$.

Determinare per quale dei seguenti valori di n risulta intero il numero

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^n.$$

- (A) 2024 (B) 2027 (C) 2025 (D) 2023 (E) 2026

5. Tre amici stanno considerando le seguenti equazioni funzionali, tutte pensate per funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supposte verificate per ogni coppia di numeri reali x e y :

$$f(f(x+y)) = x+y, \quad f(f(x+y)) = f(x)+y, \quad f(f(x+y)) = f(x)+f(y).$$

- Alberto afferma: “Solo una ha soluzione unica”.
- Barbara afferma: “Solo una ammette almeno una soluzione tale che $f(2024) = 2025$ ”.
- Cristina afferma: “Solo una ammette infinite soluzioni”.

Chi ha ragione?

- (A) Solo Alberto e Barbara (B) Solo Barbara e Cristina
(C) Solo Alberto e Cristina (D) Solo Alberto (E) Tutti

6. Sia N il numero degli interi positivi minori di 10000 (diecimila) nella cui rappresentazione in base 10 compare *almeno* una cifra 7.
Determinare quale dei seguenti primi divide N .

- (A) 17 (B) 23 (C) 11 (D) 19 (E) 13

7. Un intero positivo si dice *ottonico* se la somma delle cifre della sua rappresentazione decimale è uguale ad 8.
Determinare *quanti* numeri di quattro cifre (con la cifra delle migliaia diversa da 0) sono ottonici.

- (A) 165 (B) 232 (C) 120 (D) 56 (E) 420

8. Un numero di quattro cifre si dice *ripetitivo* se la sua rappresentazione in base 10 è del tipo $abab$, con a diverso da zero. Così, per esempio, 7373 e 7777 sono numeri ripetitivi di quattro cifre, mentre 77, 707, e 2772 non lo sono.
Sia S la somma di tutti i numeri ripetitivi di quattro cifre.
Determinare quale dei seguenti primi *non* divide S .

- (A) 101 (B) 109 (C) 3 (D) 5 (E) 13

9. Per tassellare una tabella $m \times n$ abbiamo a disposizione due tipi di pezzi:

- quadrati 2×2 (costituiti da 4 caselle),
- pezzi a forma di L ottenuti rimuovendo un quadrato 2×2 da un quadrato 3×3 (costituiti da 5 caselle).

Determinare *quante* delle seguenti tabelle

$$4444 \times 3333$$

$$555 \times 333$$

$$444 \times 5555$$

$$3333 \times 5555$$

$$4444 \times 555$$

possono essere tassellate (rispettando la quadrettatura, senza creare sovrapposizioni o sfiorare dai bordi) usando i pezzi a disposizione.

(A) Una (B) Tre (C) Quattro (D) Cinque (E) Due

10. Un grafo ha v vertici, da ciascuno dei quali partono d lati (ogni lato collega una coppia di vertici distinti, e ogni coppia di vertici distinti è collegata da al massimo un lato). Il grafo ha c componenti connesse.

Determinare *quante* delle seguenti terne

$$(2024, 3, 1)$$

$$(2024, 3, 500)$$

$$(2024, 1012, 2)$$

$$(2025, 33, 1)$$

$$(2025, 32, 33)$$

possono essere la terna (v, d, c) del grafo.

(A) Tre (B) Una (C) Cinque (D) Due (E) Quattro

11. Nel piano cartesiano, un triangolo T ha un vertice in $(0, 0)$ e un vertice in $(2025, 25)$. Il restante vertice è in un punto (a, b) a coordinate intere, non allineato con i due punti precedenti.

Sappiamo che, tra tutti i triangoli con queste proprietà, T ha area minima.

Determinare quale dei seguenti è un possibile valore di a .

(A) 343 (B) 233 (C) 424 (D) -431 (E) -244

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero in cui $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. Detto E il punto di intersezione delle diagonali AC e BD , sappiamo che $CD = 12$, $AC = 5$ e $AE = 1$.

Determinare la lunghezza di AD .

(A) $\sqrt{93}$ (B) $\sqrt{97}$ (C) $\sqrt{99}$ (D) $\sqrt{91}$ (E) $\sqrt{95}$

13. Sia ABC un triangolo equilatero, e siano M il punto medio di AB ed N il punto medio di BC . La circonferenza circoscritta al triangolo BMN interseca nuovamente la retta CM nel punto P .

Sapendo che $CP = 1$, determinare la lunghezza dei lati di ABC .

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

14. Sia ABC un triangolo i cui lati hanno tutti lunghezza intera. Sappiamo che $BC = 8$ e che l'ampiezza dell'angolo in B è il triplo dell'ampiezza dell'angolo in A .

Determinare quale delle seguenti può essere la lunghezza di AC .

- (A) 13 (B) 12 (C) 10 (D) 11 (E) 9

15. Sia ABC un triangolo con $AB < AC$, sia O il suo circocentro, e sia M il punto medio di BC . La perpendicolare a OB passante per B interseca la perpendicolare a OC passante per C nel punto D . Sappiamo che $\angle BDC = 72^\circ$ e $\angle DAM = 12^\circ$.

Determinate l'ampiezza di $\angle BAD$.

- (A) 25° (B) 21° (C) 23° (D) 29° (E) 27°

16. Determinare quanti sono gli interi n , con $2000 \leq n \leq 2200$, per cui la frazione

$$\frac{n-13}{5n+6}$$

si può ulteriormente semplificare.

- (A) Nessuno (B) Sette (C) Uno (D) Tre (E) Cinque

17. Sia k il più piccolo intero positivo tale che $75k$ ha esattamente 75 divisori positivi (compresi 1 e il numero stesso).

Determinare quanti sono i divisori positivi di k .

- (A) 24 (B) 42 (C) 30 (D) 84 (E) 20

18. La stradina che gira intorno ad un laghetto è lunga 360 metri. Forrest Gump inizia a percorrere la stradina, e continua a girare nello stesso verso fino ad aver completato 2024^{2024} metri.

Determinare quanti metri aveva percorso quando è passato per la prima volta nel punto in cui si trova al termine dell'impresa.

- (A) 180 (B) 226 (C) 160 (D) 216 (E) 136

19. Siano $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ numeri interi tali che

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_{1000}}{1000} = 0.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni *potrebbe* essere *falsa*.

- (A) a_{625} è multiplo di 5 (B) a_{343} è multiplo di 7 (C) a_{512} è pari
(D) a_{961} è multiplo di 31 (E) a_{729} è multiplo di 3

20. Determinare il più piccolo intero positivo n con questa proprietà:

in ogni insieme costituito da n interi positivi (distinti), esistono due elementi a e b tali che $2^a - 2^b$ è positivo e multiplo di 2025.

- (A) 55 (B) 1081 (C) 2026 (D) 541 (E) 2025