

Stage Senior Pisa 2024 – Test Iniziale

Tempo concesso: 150 minuti	Valutazione: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5
-----------------------------------	---

1. Determinare quante sono le coppie (a, b) di numeri reali positivi tali che

$$(2 + 3a)(1 + 2b)(3a + 4b) = 96ab.$$

- (A) Infinite (B) Più di due, ma un numero finito (C) Una (D) Due
(E) Nessuna

2. Determinare il più piccolo numero reale k tale che

$$a^2 + \frac{2}{b} + 3c \leq \sqrt{a^2 + k} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + c^2}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali con $b \neq 0$.

- (A) 14 (B) $\sqrt{13}$ (C) 6 (D) $\sqrt{14}$ (E) 13

3. Sia $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio a coefficienti reali. Sappiamo che le quattro radici di $p(x)$ (eventualmente complesse e contate con molteplicità) hanno tutte modulo (o valore assoluto) uguale a 1.

Determinare quale delle seguenti affermazioni è *sicuramente falsa*.

- (A) $a = 3$ (B) $a = c$ (C) $b = -\sqrt{5}$ (D) $c = \sqrt{2}$ (E) $b = \sqrt{31}$

4. Consideriamo il numero $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$.

Determinare per quale dei seguenti valori di n risulta intero il numero

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^n.$$

- (A) 2024 (B) 2027 (C) 2025 (D) 2023 (E) 2026

5. Tre amici stanno considerando le seguenti equazioni funzionali, tutte pensate per funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supposte verificate per ogni coppia di numeri reali x e y :

$$f(f(x+y)) = x+y, \quad f(f(x+y)) = f(x)+y, \quad f(f(x+y)) = f(x)+f(y).$$

- Alberto afferma: “Solo una ha soluzione unica”.
- Barbara afferma: “Solo una ammette almeno una soluzione tale che $f(2024) = 2025$ ”.
- Cristina afferma: “Solo una ammette infinite soluzioni”.

Chi ha ragione?

- (A) Solo Alberto e Barbara (B) Solo Barbara e Cristina
(C) Solo Alberto e Cristina (D) Solo Alberto (E) Tutti

6. Sia N il numero degli interi positivi minori di 10000 (diecimila) nella cui rappresentazione in base 10 compare *almeno* una cifra 7.
Determinare quale dei seguenti primi divide N .

- (A) 17 (B) 23 (C) 11 (D) 19 (E) 13

7. Un intero positivo si dice *ottonico* se la somma delle cifre della sua rappresentazione decimale è uguale ad 8.
Determinare *quanti* numeri di quattro cifre (con la cifra delle migliaia diversa da 0) sono ottonici.

- (A) 165 (B) 232 (C) 120 (D) 56 (E) 420

8. Un numero di quattro cifre si dice *ripetitivo* se la sua rappresentazione in base 10 è del tipo $abab$, con a diverso da zero. Così, per esempio, 7373 e 7777 sono numeri ripetitivi di quattro cifre, mentre 77, 707, e 2772 non lo sono.
Sia S la somma di tutti i numeri ripetitivi di quattro cifre.
Determinare quale dei seguenti primi *non* divide S .

- (A) 101 (B) 109 (C) 3 (D) 5 (E) 13

9. Per tassellare una tabella $m \times n$ abbiamo a disposizione due tipi di pezzi:

- quadrati 2×2 (costituiti da 4 caselle),
- pezzi a forma di L ottenuti rimuovendo un quadrato 2×2 da un quadrato 3×3 (costituiti da 5 caselle).

Determinare *quante* delle seguenti tabelle

$$4444 \times 3333$$

$$555 \times 333$$

$$444 \times 5555$$

$$3333 \times 5555$$

$$4444 \times 555$$

possono essere tassellate (rispettando la quadrettatura, senza creare sovrapposizioni o sfiorare dai bordi) usando i pezzi a disposizione.

(A) Una (B) Tre (C) Quattro (D) Cinque (E) Due

10. Un grafo ha v vertici, da ciascuno dei quali partono d lati (ogni lato collega una coppia di vertici distinti, e ogni coppia di vertici distinti è collegata da al massimo un lato). Il grafo ha c componenti connesse.

Determinare *quante* delle seguenti terne

$$(2024, 3, 1)$$

$$(2024, 3, 500)$$

$$(2024, 1012, 2)$$

$$(2025, 33, 1)$$

$$(2025, 32, 33)$$

possono essere la terna (v, d, c) del grafo.

(A) Tre (B) Una (C) Cinque (D) Due (E) Quattro

11. Nel piano cartesiano, un triangolo T ha un vertice in $(0, 0)$ e un vertice in $(2025, 25)$. Il restante vertice è in un punto (a, b) a coordinate intere, non allineato con i due punti precedenti.

Sappiamo che, tra tutti i triangoli con queste proprietà, T ha area minima.

Determinare quale dei seguenti è un possibile valore di a .

(A) 343 (B) 233 (C) 424 (D) -431 (E) -244

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero in cui $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. Detto E il punto di intersezione delle diagonali AC e BD , sappiamo che $CD = 12$, $AC = 5$ e $AE = 1$.

Determinare la lunghezza di AD .

(A) $\sqrt{93}$ (B) $\sqrt{97}$ (C) $\sqrt{99}$ (D) $\sqrt{91}$ (E) $\sqrt{95}$

13. Sia ABC un triangolo equilatero, e siano M il punto medio di AB ed N il punto medio di BC . La circonferenza circoscritta al triangolo BMN interseca nuovamente la retta CM nel punto P .

Sapendo che $CP = 1$, determinare la lunghezza dei lati di ABC .

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

14. Sia ABC un triangolo i cui lati hanno tutti lunghezza intera. Sappiamo che $BC = 8$ e che l'ampiezza dell'angolo in B è il triplo dell'ampiezza dell'angolo in A .

Determinare quale delle seguenti può essere la lunghezza di AC .

- (A) 13 (B) 12 (C) 10 (D) 11 (E) 9

15. Sia ABC un triangolo con $AB < AC$, sia O il suo circocentro, e sia M il punto medio di BC . La perpendicolare a OB passante per B interseca la perpendicolare a OC passante per C nel punto D . Sappiamo che $\angle BDC = 72^\circ$ e $\angle DAM = 12^\circ$.

Determinate l'ampiezza di $\angle BAD$.

- (A) 25° (B) 21° (C) 23° (D) 29° (E) 27°

16. Determinare quanti sono gli interi n , con $2000 \leq n \leq 2200$, per cui la frazione

$$\frac{n-13}{5n+6}$$

si può ulteriormente semplificare.

- (A) Nessuno (B) Sette (C) Uno (D) Tre (E) Cinque

17. Sia k il più piccolo intero positivo tale che $75k$ ha esattamente 75 divisori positivi (compresi 1 e il numero stesso).

Determinare quanti sono i divisori positivi di k .

- (A) 24 (B) 42 (C) 30 (D) 84 (E) 20

18. La stradina che gira intorno ad un laghetto è lunga 360 metri. Forrest Gump inizia a percorrere la stradina, e continua a girare nello stesso verso fino ad aver completato 2024^{2024} metri.

Determinare quanti metri aveva percorso quando è passato per la prima volta nel punto in cui si trova al termine dell'impresa.

- (A) 180 (B) 226 (C) 160 (D) 216 (E) 136

19. Siano $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ numeri interi tali che

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_{1000}}{1000} = 0.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni *potrebbe* essere *falsa*.

- (A) a_{625} è multiplo di 5 (B) a_{343} è multiplo di 7 (C) a_{512} è pari
(D) a_{961} è multiplo di 31 (E) a_{729} è multiplo di 3

20. Determinare il più piccolo intero positivo n con questa proprietà:

in ogni insieme costituito da n interi positivi (distinti), esistono due elementi a e b tali che $2^a - 2^b$ è positivo e multiplo di 2025.

- (A) 55 (B) 1081 (C) 2026 (D) 541 (E) 2025

Test Iniziale 2024 – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	E	C	C	D	D	C	E	E	A	E	B	A	C	B	D	E	E	B	D

Test Iniziale – “Aiutini”

1. Dimostriamo che l'unica coppia che risolve l'equazione è $(a, b) = (2/3, 1/2)$.

Il fatto che funziona è una verifica immediata. Per dimostrare che è l'unica, dalla disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica (applicata come e a cosa?) otteniamo che

$$2 + 3a \geq 2\sqrt{2}\sqrt{3a}, \quad 1 + 2b \geq 2\sqrt{2b}, \quad 3a + 4b \geq 2\sqrt{3a}\sqrt{4b}.$$

Moltiplicando tra di loro queste disuguaglianze (ma si può impunemente?) deduciamo che

$$(2 + 3a)(1 + 2b)(3a + 4b) \geq 96ab$$

per ogni coppia (a, b) di numeri reali positivi. Inoltre vale il segno di uguale se e solo se vale il segno di uguale nelle tre disuguaglianze singole, il che si realizza se e solo se (perché?)

$$2 = 3a, \quad 1 = 2b, \quad 3a = 4b,$$

il che accade se e solo se $a = 2/3$ e $b = 1/2$.

2. Dimostriamo che la migliore costante è 13.

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle triple

$$(a, 2, 3) \quad \text{e} \quad \left(a, \frac{1}{b}, c\right)$$

otteniamo che

$$a^2 + \frac{2}{b} + 3c \leq \sqrt{a^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + c^2},$$

il che dimostra che la disuguaglianza proposta vale quando $k = 13$.

D'altra parte, scegliendo $(a, b, c) = (1, 1/2, 3)$ (da dove arriva questa scelta buffa?) si ottiene che

$$14 \leq \sqrt{k+1} \cdot \sqrt{14},$$

il che dimostra che necessariamente deve essere $k \geq 13$.

3. Dimostriamo che b non può essere uguale a $-\sqrt{5}$.

Poiché i coefficienti del polinomio sono reali, le radici saranno a coppie complesse coniugate (perché?), cioè del tipo $\alpha \pm i\beta$ e $\gamma \pm i\delta$, dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali che soddisfano la condizione

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Ma allora, accoppiando le radici a due a due, possiamo fattorizzare il polinomio nella forma (ma che fine hanno fatto β e δ ? e perché vale questa scomposizione?)

$$p(x) = (x^2 - 2\alpha x + 1)(x^2 - 2\gamma x + 1).$$

Svolgendo i calcoli ed uguagliando i coefficienti scopriamo quindi che

$$a = c = -2(\alpha + \gamma), \quad b = 2 + 4\alpha\gamma, \quad d = 1.$$

Ricordando che α e γ stanno nell'intervallo $[-1, 1]$ (perché?), da queste uguaglianze deduciamo che a e c stanno in $[-4, 4]$, e sono uguali tra di loro, mentre b sta in $[-2, 6]$ (come mai?), e quindi non può valere $-\sqrt{5}$.

D'altra parte, si può verificare (farlo!) che le altre opzioni di risposta possono essere prodotte da opportuni valori di α e γ negli intervalli indicati, e quindi da un opportuno polinomio $p(x)$.

Convincente? Male! Il discorso iniziale sull'accoppiamento con la coniugata vale per le radici che sono “davvero complesse”, cioè con parte immaginaria diversa da zero. Per le radici reali, che in questo caso possono solo essere ± 1 , vale il discorso dell'accoppiamento solo se hanno molteplicità 2 o 4 (in che senso?).

Resta dunque fuori il caso il cui le radici di $p(x)$ sono $+1, -1$, e due radici “davvero complesse coniugate” (perché non ci sono situazioni più buffe, ad esempio con una sola radice reale? e come la mettiamo con la molteplicità 3?). In tal caso il polinomio sarà della forma

$$p(x) = (x^2 - 2\alpha x + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 2\alpha x^3 + 2\alpha x - 1,$$

e quindi

$$a = -c = -2\alpha, \quad b = 0, \quad d = -1,$$

per cui ancora una volta $b = -\sqrt{5}$ non è possibile.

4. Dimostriamo che la potenza indicata è intera se e solo se l'esponente n è multiplo di 3, il che nel nostro caso accade solo quando $n = 2025$.

Per farlo, poniamo $\alpha = \sqrt[3]{2}$, e osserviamo che $a = \alpha^2 + \alpha + 1$. Ne segue che

$$1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1} = 1 + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1} = 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha^3 - 1} = \alpha = \sqrt[3]{2},$$

da cui la tesi.

5. Solo Alberto ha ragione. La dimostrazione segue dai seguenti fatti.

- La prima equazione ha infinite soluzioni, e infinite di queste verificano $f(2024) = 2025$. Per dimostrarlo basta osservare che tutte le funzioni involutive, cioè tali che $f(f(z)) = z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, sono soluzioni della prima equazione funzionale. Di queste funzioni ce ne sono tantissime: basta scrivere \mathbb{R} come unione di singoletti del tipo $\{a\}$ e insiemi di due elementi del tipo $\{b, c\}$, e poi definire f in maniera da lasciare fissi tutti i singoletti e scambiare tutte le coppie (come funziona questa definizione?). Ne segue che ci sono infinite funzioni che soddisfano la prima equazione, e ce ne sono anche con $f(2024) = 2025$, in quanto basta includere $\{2024, 2025\}$ tra gli insiemi di due elementi su cui effettuare lo scambio.

- La seconda equazione funzionale ha come unica soluzione la funzione $f(x) = x$.

Per dimostrarlo, sfruttando la simmetria scopriamo che deve essere $f(x) + y = f(y) + x$, e quindi $f(x) - x = f(y) - y$, per ogni coppia di numeri reali x e y . Da questo si deduce che $f(x) - x$ deve essere costante (perché mai?), e quindi $f(x) = x + c$ per una qualche costante c . A questo punto per sostituzione diretta nell'equazione funzionale iniziale si scopre che necessariamente $c = 0$, e quindi $f(x) = x$ è l'unica soluzione della seconda equazione funzionale.

- La terza equazione funzionale ha come soluzioni (almeno) tutte le traslazioni del tipo $f(x) = x + c$, qualunque sia la costante reale c . In particolare, le soluzioni sono infinite e una di esse, quella con $c = 1$, ha la proprietà che $f(2024) = 2025$.

Per dimostrarlo, basta sostituire direttamente nell'equazione.

[Da qui in poi leggere a proprio rischio e pericolo] Più complicato, ma non necessario, è trovare tutte le soluzioni della terza equazione funzionale. Per farlo, definiamo $c = f(0)$, e ponendo $y = 0$ deduciamo che $f(f(x)) = f(x) + c$ per ogni x reale, e di conseguenza

$$f(x) + f(y) = f(x + y) + c$$

per ogni coppia di numeri reali x e y . Da questo deduciamo che la funzione $\varphi(x) = f(x) - c$ risolve un'equazione di Cauchy. Se stiamo cercando soluzioni $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, questo ci dice che $f(x) = kx + c$, e sostituendo nell'equazione iniziale restano solo le traslazioni $f(x) = x + c$ e la funzione identicamente nulla $f(x) \equiv 0$. Se invece vogliamo soluzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, esistono possibilità molto più esotiche, che derivano da soluzioni esotiche dell'equazione di Cauchy, costruite utilizzando una *base di Hamel*: ogni elemento della base deve andare, mediante φ , o in se stesso o in 0, e c deve essere combinazione lineare degli elementi della base che vanno in se stessi.

6. Dimostriamo che $N = 3439 = 19 \cdot 181$. Per farlo, segnaliamo due approcci.

- Pensiamo al complementare ed otteniamo che

$$10^4 - 9^4 = 3439.$$

In questo conto 10^4 sono tutti i numeri da 0 a 9999, mentre 9^4 sono quelli che si scrivono senza usare la cifra 7 (perché? e che fine ha fatto il 10000?).

- Dal *principio di inclusione esclusione* (che bestia è?) otteniamo che il numero richiesto è

$$\binom{4}{1} \cdot 1000 - \binom{4}{2} \cdot 100 + \binom{4}{3} \cdot 10 - 1 = 4000 - 600 + 40 - 1 = 3439.$$

In questo conto

- $4 \cdot 1000$ sono tutti i numeri che contengono *almeno una* cifra 7 (perché?),
- $6 \cdot 100$ sono tutti i numeri che contengono *almeno due* cifre 7 (perché?),
- $4 \cdot 10$ sono tutti i numeri che contengono *almeno tre* cifre 7 (perché?),
- 1 è il numero 7777.

Perché funziona tutto questo?

7. Indicata la rappresentazione in base 10 del numero in questione con $abcd$, si tratta di risolvere

$$a + b + c + d = 8 \quad \text{con i vincoli } a \geq 1 \text{ e } b, c, d \geq 0.$$

Questo è equivalente (perché?) a risolvere

$$a + b + c + d = 7 \quad \text{con i vincoli } a, b, c, d \geq 0.$$

Il problema a sua volta è equivalente a colorare tre caselle in una riga di 10 (dividendo la riga in 4 tronconi, di cui alcuni possono essere vuoti, le cui lunghezze sono proprio a, b, c, d). Questo si può fare in $\binom{10}{3} = 120$ modi.

Ma come funziona questo trucco in generale?

8. Si tratta di dimostrare che

$$S = 101 \cdot (10 + 11 + \dots + 99) = 101 \cdot \frac{109 \cdot 90}{2} = 101 \cdot 109 \cdot 5 \cdot 9.$$

Infatti basta osservare che i numeri della forma $abab$ si possono scrivere come 101 moltiplicato per il numero ab , con ab che varia da 10 a 99.

9. Le uniche tabelle tassellabili, tra quelle proposte, sono la 333×555 e la 444×5555 .

Per dimostrarlo, le osservazioni fondamentali sono le seguenti.

- Le tabelle $2a \times 2b$ si tassellano usando blocchi 2×2 .
- Le tabelle $3a \times 3b$ si tassellano usando blocchi 3×3 (e allora?): questo sistema la tabella 333×555 .
- Le tabelle $6a \times b$ (con $b \geq 2$) si tassellano scrivendo $b = 3c + 2d$ e riducendosi (come?) all'unione di due casi precedenti: questo sistema la tabella 444×5555 .
- Se una dimensione è dispari, allora l'altra è necessariamente multipla di 3. Per dimostrarlo coloriamo con due colori a strisce perpendicolari alla dimensione dispari, e osserviamo che in ogni blocco la differenza tra i due colori è multipla di 3 (cos'è questa storia?).

Questo basta per escludere le restanti tre tabelle.

10. Tra quelle proposte, le terne ammissibili sono tre. La dimostrazione segue dalle seguenti osservazioni.

- La terna $(2024, 3, 1)$ è possibile: basta considerare 2024 punti equispaziati su una circonferenza e poi collegare ogni punto con i due vicini e con l'opposto. Questo funziona perché 2024 è pari (dove lo abbiamo usato?).
- La terna $(2024, 3, 500)$ è possibile: basta considerare 499 quadrati completi delle diagonali, ed un poligono con 28 vertici collegati come sopra.
- La terna $(2024, 1012, 2)$ non è possibile. Il fatto generale è il seguente: se un grafo ha n vertici, e da ogni vertice parte un numero di lati maggiore o uguale a $n/2$, allora il grafo è necessariamente connesso, anzi ogni coppia di vertici distinti P e Q ha almeno un contatto in comune. Come si dimostra questo fatto? Quanti vertici avrebbe la componente connessa più piccola?

- La terna $(2025, 33, 1)$ non è possibile. Il fatto generale è il seguente: in ogni grafo, il numero di vertici dal quale parte un numero dispari di lati è pari (quindi non è possibile avere 2025 vertici dai quali partono 33 lati). Questo fatto si dimostra osservando che sommando il numero dei lati che partono da ogni vertice si ottiene il doppio del numero totale dei lati (convincersene, e interpretarlo come un esempio di *double counting*).
- La terna $(2025, 32, 33)$ è possibile: basta considerare 32 grafi completi (cosa sono?) con 33 punti, e sistemare i punti rimanenti in un poligono in cui ogni vertice è collegato con i 16 vertici che stanno alla sua sinistra ed i 16 vertici che stanno alla sua destra (convincersi che questa configurazione funziona!).

11. L'area minima di un triangolo T con le proprietà indicate è $25/2$, e si realizza se e solo se $|81b - a| = 1$, cioè se e solo se $a \equiv \pm 1$ modulo 81. L'unico tra i valori indicati nelle risposte con questa proprietà è -244 .

Per dimostrare tutto questo iniziamo ad applicare il *teorema di Pick* (cos'è?), il quale ci dice che l'area del triangolo è maggiore o uguale di (da dove arriva questo conto?)

$$0 + \frac{26 + 1}{2} - 1 = \frac{25}{2},$$

con uguaglianza se e solo se il triangolo non contiene punti a coordinate intere se non quelli che stanno sul segmento che congiunge $P = (0, 0)$ e $Q = (2025, 25)$ (che sono 26 punti) ed il vertice $R = (a, b)$. D'altra parte possiamo anche calcolare l'area usando la lunghezza della base PQ e la distanza di R dalla base, che possiamo calcolare usando la classica formula per la distanza di un punto da una retta. In questo modo otteniamo che (a cosa corrispondono i vari fattori?)

$$\frac{25}{2} = \frac{1}{2} \cdot 25\sqrt{1 + 81^2} \cdot \frac{|81b - a|}{\sqrt{1 + 81^2}},$$

da cui concludiamo che deve essere $|81b - a| = 1$.

12. Dimostriamo che $AD = \sqrt{97}$.

Per farlo, osserviamo che il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio rettangolo con base maggiore CD e base minore BA . Dalla similitudine tra i triangoli CED e AEB (da cosa segue?) deduciamo (come?) che $AB = 3$. A questo punto dal triangolo rettangolo ABC deduciamo che $BC = 4$ e infine (da dove arriva quest'ultimo conto?) $AD^2 = 9^2 + 4^2 = 97$.

13. Dimostriamo che la lunghezza dei lati è $\sqrt{3}$.

Per farlo, indichiamo con ℓ tale lunghezza. Calcolando in due modi la potenza di C rispetto alla circonferenza passante per M , B , N , P , troviamo (come?) la relazione

$$CP \cdot CM = CN \cdot CB,$$

cioè

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = \frac{\ell}{2} \cdot \ell,$$

da cui si ricava facilmente il valore di ℓ .

14. Tra quelle indicate, l'unica lunghezza di AC compatibile con i vincoli è 10.

Per dimostrarlo, utilizziamo le notazioni standard per gli elementi di un triangolo. Poiché per ipotesi $\beta = 3\alpha$, dal teorema dei seni deduciamo che (ma da dove viene fuori il 4α ?)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(3\alpha)} = \frac{c}{\sin(4\alpha)}.$$

Ricordando, o ricavando, che $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, dalla prima uguaglianza deduciamo che (ma come abbiamo stabilito i segni?)

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3a-b}}{2\sqrt{a}} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a}},$$

e di conseguenza

$$c = \frac{a \sin(4\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot 2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)}{\sin \alpha} = 4a \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) = \frac{(b-a)\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}.$$

Tenendo conto che $a = 8$, abbiamo che

$$c = (b-8) \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{8}}$$

deve essere intero, il che (tra i valori proposti) accade solo quando $b = 10$.

15. Dimostriamo che $\angle BAD = 21^\circ$.

Per farlo, osserviamo che il quadrilatero $OBDC$ è ciclico, e quindi $\angle BOC = 108^\circ$, da cui (perché?) $\angle BAC = 54^\circ$. L'osservazione fondamentale è ora che D appartiene alla *simmediata* uscente dal vertice A (cos'è questo mostro?), e di conseguenza gli angoli $\angle BAD$ e $\angle MAC$ hanno la stessa ampiezza, e cioè $(54^\circ - 12^\circ)/2 = 21^\circ$.

Ma in tutto questo ci sarebbe qualche problema di configurazione? Dove abbiamo usato che $AB < AC$?

16. I possibili valori di n nel range indicato sono tre: 2001, 2072 e 2143.

Supponiamo infatti che la frazione si possa semplificare. Questo vuol dire che esiste un primo p tale che

$$p \mid n - 13 \quad \text{e} \quad p \mid 5n + 6.$$

Ma allora p divide $(5n + 6) - 5(n - 13) = 71$, e quindi $p = 71$. Il problema è pertanto equivalente a trovare i valori di n per cui $71 \mid n - 13$, e cioè $n \equiv 13$ modulo 71.

Nel range proposto, ci sono i tre valori indicati (come si verifica velocemente?). Qual è la tecnica generale che sta sotto a questo esercizio?

17. Il più piccolo intero con la proprietà indicata è $k = 2^4 \cdot 3^3$, e ha $5 \cdot 4 = 20$ divisori.

Per dimostrarlo osserviamo che $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$. Di conseguenza, i numeri con 75 divisori sono tutti e soli quelli che ricadono in una di queste tre categorie (cercare di capire da dove segue questa divisione in casi).

- Numeri del tipo p^{74} , con p primo. Nessuno di questi ovviamente è multiplo di 75.
- Numeri del tipo $p^{25}q^3$, con p e q primi. Tenendo conto della divisibilità per 75, in questa categoria ricadono $3^{25} \cdot 5^3$ e $3^3 \cdot 5^{25}$. I corrispondenti valori di k sono grandicelli.
- Numeri del tipo $p^2q^4r^4$, con p, q, r primi. Tra questi, il più piccolo è $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ (perché?), che corrisponde al valore di k indicato sopra.

18. Il problema equivale a determinare la classe di resto di 2024^{2024} modulo 360.

Poiché $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5$, la cosa è equivalente a determinare la classe di resto modulo 8, 9, 5 (cosa stiamo usando qui?). Con facili (per chi?) conti si ottiene che

$$2024^{2024} \equiv 0 \pmod{8}, \quad (1)$$

$$2024^{2024} \equiv (-1)^{2024} \equiv 1 \pmod{9}, \quad (2)$$

$$2024^{2024} \equiv (-1)^{2024} \equiv 1 \pmod{5}, \quad (3)$$

da cui (come?) $2024^{2024} \equiv 136$ modulo 360.

19. Il coefficiente a_{343} non è necessariamente multiplo di 7: infatti per esempio

$$\frac{3}{343} + \frac{1}{686} - \frac{1}{49} = 0.$$

D'altra parte, gli altri coefficienti devono verificare le divisibilità richieste, per motivi di "valutazione p -adica delle frazioni" (e cosa sarebbe?). Detto in maniera più elementare, il discorso è il seguente.

- La frazione con denominatore $512 = 2^9$ è quella il cui denominatore contiene la potenza di 2 più grande, ed è l'unica. Se il suo numeratore non è pari, allora la somma delle frazioni non può annullarsi, in quanto facendo il denominatore comune e sommando le frazioni nel modo usuale otterremmo un numeratore che ha tutti addendi pari tranne uno (convincersi di questo fatto e capire perché è rilevante).
- La frazione con denominatore 729 è l'unica ad avere un denominatore divisibile per 3^6 , cioè la massima potenza di 3 che compare. Da qui si conclude in maniera analoga al caso precedente (come precisamente?).
- La frazione con denominatore 625 è l'unica ad avere un denominatore divisibile per 5^4 , cioè la massima potenza di 5 che compare.
- La frazione con denominatore 961 è l'unica ad avere un denominatore divisibile per 31^2 , cioè la massima potenza di 31 che compare.

Ma perché i ragionamenti precedenti non valevano nel caso di $343 = 7^3$?

20. Il più piccolo intero positivo con la proprietà richiesta è 541, cioè uno in più dell'*ordine moltiplicativo* di 2 modulo 2025 (che bestia è?).

Poiché $2025 = 25 \cdot 81$, l'ordine richiesto è il minimo comune multiplo tra l'ordine moltiplicativo di 2 modulo 25 e modulo 81 (qual è il fatto generale che ci sta sotto?).

Per determinare tali ordini, basta osservare che (quali fatti generali stiamo usando? Cos'è questa ϕ misteriosa?)

- 2 è un generatore modulo 5 e modulo 25 (perché?), quindi $\text{ord}_{25}(2) = \phi(25) = 20$,
- 2 è generatore modulo 3 e modulo 9 (perché?), quindi è generatore modulo ogni potenza di 3 (altro fatto generale?), ed in particolare $\text{ord}_{81}(2) = \phi(81) = 54$.

Non resta dunque che fare il minimo comune multiplo di 20 e 54, e capire tutti i fatti generali usati strada facendo.

Ma perché poi alla fine si aggiunge 1?