

Stage Senior Pisa 2023 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Sia $P(x)$ il polinomio di grado 100 tale che $P(0) = 1$ e $P(1/k) = 0$ per ogni $k = 1, 2, \dots, 100$.
Determinare il coefficiente di x^2 in $P(x)$.

2. Determinare il più piccolo *intero* k per cui *esistono* numeri *reali positivi* a e b tali che

$$(1+a)^{2023}(1+b)^{3202} \leq 1+k(a+b).$$

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola “STAGISTI” in cui la prima e l’ultima lettera sono *diverse*.

4. Consideriamo un decagono regolare.

Determinare quanti sono i triangoli *acutangoli* i cui vertici sono anche vertici del decagono.

5. Sia $ABCD$ un quadrato di lato unitario, sia M il punto medio del lato AB , e sia N il punto medio del lato AD .

Determinare il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo CMN .

6. Sia ABC un triangolo rettangolo in A , e sia L il piede della bisettrice dell’angolo in B . La circonferenza circoscritta al triangolo CLB interseca nuovamente il lato AB nel punto K .

Sapendo che $AK = 5$ e $AB = 3$, determinare la lunghezza di BC .

7. Determinare il più grande intero positivo a per cui esiste un intero positivo b tale che

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{5}.$$

8. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che

$$25^{25} \text{ divide } (2023^n - 48^n).$$

Problemi dimostrativi

9. Dimostrare che

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2 \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)$$

per ogni terna a, b, c di numeri reali positivi tali che $ab + bc + ca = 1$.

10. In una nazione ci sono 2023 città. Ogni coppia di città è collegata da un volo andata/ritorno, gestito da una certa compagnia aerea (la stessa per l'andata e per il ritorno). Per ogni città, i voli in partenza sono gestiti da compagnie aeree tutte diverse.

Determinare il minimo numero di compagnie aeree necessarie.

11. Sia ABC un triangolo, e sia L il piede della bisettrice dell'angolo in A . L'asse di AL interseca la circonferenza circoscritta al triangolo ABC in P e Q .

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo LPQ è tangente a BC .

12. Sia S l'insieme degli interi positivi.

Determinare tutte le funzioni $f : S \rightarrow S$ che soddisfano le seguenti due condizioni:

- $f(ab) = f(a)f(b)$ per ogni coppia di interi positivi a e b ,
- $\{1, 2, \dots, n\} = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ per infiniti interi positivi n .