

Ammissione EGMO Camp Pisa 2023

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Sia $ABCD$ un parallelogramma in cui la bisettrice dell'angolo in A interseca il lato BC in M , e la bisettrice dell'angolo $\angle AMC$ passa per il vertice D . Sapendo che $\angle MDC = 45^\circ$, determinare gli angoli del parallelogramma.
2. Giorgia sta preparando diversi dolcetti per allietare gli spiriti nella notte più buia dell'anno. La sua passione per la geometria l'ha portata a tagliare il marzapane in triangoli, ma non triangoli qualunque! Siano A, B e C tre punti del piano a coordinate intere. Sappiamo che il triangolo ABC ha tutti i lati di lunghezza intera. Dimostrare che il perimetro del triangolo ABC è un numero pari.
3. Sabrina non ha preparato alcun dolcetto per Halloween, pertanto alcuni spiritelli maligni hanno deciso di nascondere le chiavi di casa. Potrà riaverle solo se riesce a risolvere il seguente indovinello: sul tavolo ci sono 50 buste all'interno delle quali ci sono delle lettere su cui è scritto il numero 1 o -1 . Facendo una domanda, Sabrina può scoprire il prodotto dei numeri scritti su 3 lettere qualsiasi. Quale è il numero minimo di domande necessarie a Sabrina per determinare il prodotto dei 50 numeri?
4. Indichiamo con $a_1, a_2, \dots, a_n$ i numeri $1, 2, \dots, n$, disposti in un qualche ordine. Per quali interi positivi n è possibile che i numeri $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ abbiano tutti resti diversi nella divisione per $n + 1$?

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Su un tavolo sono piazzate delle tovagliette rettangoli, in modo che ognuna delle tovagliette abbia i lati paralleli ai lati del tavolo. Sappiamo che comunque prendiamo due tovagliette, queste si sovrappongono. Dimostrare che c'è un punto del tavolo coperto da tutte le tovagliette.
6. Sia $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ un insieme di 5 interi con la proprietà che l'MCD di ogni sottoinsieme di 3 elementi è maggiore di 1 e l'MCD di ogni sottoinsieme di 4 elementi è uguale a 1. Determinare il minimo numero di divisori distinti del numero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.
7. Sia $\triangle ABC$ un triangolo isoscele di base AC e siano D ed E due punti sui lati AC e BC tali che $CD = DE$. Siano H, J , e K i punti medi dei lati DE, AE , e BD , rispettivamente. La circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle DHK$ interseca AD in F , e la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle HEJ$ interseca BE in G . La retta per K parallela ad AC interseca AB in I . Sia $IH \cap GF = M$. Dimostrare che i punti J, M , e K sono allineati.
8. Uno spiritello birichino ha sostituito il quadro preferito di Chiara con un disegno alquanto particolare: 2023 punti distinti del piano sono colorati di blu o di rosso, con la proprietà che, su ogni circonferenza di raggio 1 con centro in un punto blu, ci sono esattamente 2 punti rossi. Determinare quale è il massimo numero di punti blu possibile.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.