

Ammissione EGMO Camp Pisa 2022

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tali che $P(2012) = P(2022) = 0$. Sapendo che $|P(2018)| < 10$ determinare i possibili valori di $P(2018)$.
2. Un insieme di numeri interi si dice *attraente* se può essere partizionato in sottoinsiemi di 3 elementi $A_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ tali che $a_i + b_i = c_i$. L'insieme $\{1, 2, \dots, 33\}$ è *attraente*?
Nota: un insieme A si dice partizionato negli insiemi $\{A_1, \dots, A_n\}$ se tutti gli A_i sono disgiunti e $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.
3. Sia ABC un triangolo e siano L, M, N i punti medi rispettivamente di BC, CA and AB . La tangente alla circonferenza circoscritta ad ABC in A interseca LM e LN in P e Q rispettivamente. Dimostrare che CP è parallela a BQ .
4. Sia n un intero positivo tale per cui il numero $110n^3$ ha 110 divisori interi positivi, inclusi 1 e il numero $110n^3$. Quanti divisori interi positivi ha il numero $81n^4$?

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Diciamo che un intero positivo è *shuffle* se soddisfa le seguenti proprietà:
 - (a) tutte le sue cifre sono non nulle;
 - (b) è divisibile per 11;
 - (c) è divisibile per 12 e comunque si mischiano le sue cifre rimane divisibile per 12.

Quanti sono i numeri *shuffle* di 10 cifre?

6. I numeri $3, 4, \dots, 2022$ sono scritti su una lavagna. Francesca e Veronica giocano a turno, iniziando da Francesca. Ad ogni turno, il giocatore deve cancellare un numero n dalla lavagna e sostituirlo con due interi positivi a, b a sua scelta, tali che $a + b = n$. Vince il giocatore che, dopo la sua mossa, lascia scritti sulla lavagna solo numeri tutti uguali. Determinare chi ha una strategia vincente.
7. Sia ABC un triangolo e sia Γ la circonferenza circoscritta. Sia D un punto su AB tale che CD è parallelo alla retta tangente a Γ in A . Sia E l'intersezione della retta CD con Γ diversa da C , e sia F l'intersezione della retta BC con la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ADC$ diversa da C . Infine sia G l'intersezione della retta AB e della bisettrice dell'angolo $\angle DCF$. Dimostrare che E, G, F e C giacciono su una stessa circonferenza.
8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$f(\max\{x, y\} + \min\{f(x), f(y)\}) = x + y$$

per ogni coppia di reali $x, y \in \mathbb{R}$.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.