

Ammissione EGMO Camp Pisa 2021

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. N persone sono sedute attorno ad un tavolo, e ognuno di loro è un furfante o un cavaliere. I furfanti mentono sempre, i cavalieri dicono sempre la verità. Ognuno di loro dichiara che la persona seduta due posti più a sinistra (quindi la persona seduta alla sinistra della persona seduta alla sua sinistra) è un cavaliere. Sapendo che ci sono almeno un furfante e almeno un cavaliere e che $N < 2020$, quali sono i possibili valori di N ?
2. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $|AC| > |BC|$. Sia CD l'altezza: un cerchio con diametro CD interseca il lato AC in E , e il segmento BE in F . Calcolare $\angle ABE + \angle FCD$ in funzione degli angoli del triangolo.
3. Trovare tutti i sottoinsiemi non vuoti $A \subset \mathbb{R}$ con la proprietà che per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x + y \in A$, anche $xy \in A$.
4. Dimostrare che non esiste nessun intero positivo n per cui $(n+1)2^n$ e $(n+3)2^{n+2}$ sono entrambi quadrati.

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Sia $d(n)$ il numero di divisori positivi di n . Determinare tutti gli interi positivi n tali per cui per ogni divisore positivo t di n si ha $d(t)|d(n)$.
6. In un torneo di scacchi si affrontano 12 partecipanti, ciascuno dei quali sfida esattamente una volta ciascuno degli altri partecipanti. In ogni partita una vittoria vale 2 punti, una sconfitta 0 e un pareggio vale 1. Sommando i punteggi delle singole partite si ottiene il punteggio totalizzato da ciascuno scacchista.
Alla fine del torneo si nota che i punteggi totalizzati da tutti i giocatori sono a due a due differenti, e che la somma dei punteggi degli ultimi 5 classificati è pari al punteggio del secondo classificato. Chi ha vinto la partita tra il quarto e l'ottavo classificato?
7. Sia ABC un triangolo non equilatero e sia I il suo incentro. Fissato un punto D sul segmento BC , la circonferenza per B, I, D interseca AB in E e la circonferenza per C, I, D interseca AC in F . La circonferenza per D, E, F interseca nuovamente AB, AC in N, M rispettivamente.
Dimostrare che $EM \parallel FN$.
8. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali positivi. Dimostrare che se

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

è vera per $x = 1$, allora è vera per ogni $x > 0$.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.