

Ammissione EGMO Camp Pisa 2025 - Soluzioni

Problema 1

Veronica ha davanti a sé 2025 buste, numerate da 1 a 2025, in ciascuna delle quali ha messo delle monete (anche zero) secondo le seguenti regole:

- nella k -esima busta ci sono 0 o k monete;
- se la k -esima busta è vuota, allora anche la $(2026 - k)$ -esima è vuota.

È possibile che Veronica abbia 9999 monete?

Soluzione

La risposta è no.

Notiamo che la busta k è piena se e solo se la busta $2026 - k$ è piena. Supponiamo infatti che la busta k sia piena e la $2026 - k$ sia vuota. Per la seconda condizione, allora la busta k è vuota, ma ciò è assurdo. In modo analogo è assurdo il caso con $2026 - k$ piena e k vuota.

Notiamo allora che, per la prima condizione, la somma di due buste simmetriche (k e $2026 - k$) può essere solo 0 (se sono entrambe vuote) o 2026 (se sono entrambe piene). Ciò è vero ogni volta che le due buste prese in esame sono distinte, ovvero quando $k \neq 2026 - k \iff k \neq 1013$. In particolare, la loro somma è sempre divisibile per 2026. La busta centrale, che non ha una busta simmetrica, può contenere solo 0 o 1013 monete. Poiché $2026 = 2 \cdot 1013$ la somma totale sarà allora divisibile per 1013. Ma 9999 non è divisibile per 1013, perché $1013 \cdot 9 = 9117 < 9999 < 10130 = 1013 \cdot 10$. (o in alternativa perché 1013 è primo e $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$).

Commento

In un problema come questo prima di tutto bisogna capire se la risposta sia sì oppure no. Per questo può essere utile un po' di euristica su casi piccoli (ad esempio con 5,6,7 ... buste, e visto che 2025 è dispari meglio usare i dispari) per capire quali somme sono raggiungibili in quei casi: per avere un po' di intuizione il consiglio è di fissare un numero piccolo di buste (diciamo 7) e poi, cercando di riempire una busta alla volta rispettando le regole, segnarsi tutte le somme raggiungibili. È così che ci si rende conto che se riempiamo la prima busta, allora la seconda condizione implica che anche la settima sarà piena e così anche con la seconda e la sesta eccetera. Inoltre, una volta scritta tutte le somme raggiungibili vediamo che non troviamo tutti i numeri da 0 a $1 + 2 + \dots + 7 = 21$ ma ci sono dei "salti".

Per capire la natura di questi "salti", dobbiamo mettere in gioco l'idea chiave della soluzione: notare la simmetria del problema, che già dal testo spinge ad accoppiare le buste k e $2026 - k$ (e infatti avevamo notato che riempire una ci obbliga a riempire l'altra). Bisogna sfruttare questa simmetria per sommare i contenuti delle buste in modo efficiente: la somma di buste simmetriche (k e $2026 - k$) è sempre multipla di 2026. Quindi nel caso di 2025 ci verrebbe da scommettere che i "salti" siano da 2026 ma...

Attenzione alla busta centrale (2025 è dispari): non ha una simmetrica e va considerata a parte! Poiché al centro c'è la busta 1013 e $2026 = 2 \cdot 1013$, i "salti" sono allora di 1013 alla volta.

A questo punto si conclude parlando di divisibilità o notando che i multipli di 1013 sono "pochi": in ordine sono 1013, 2026, 3039, ..., 9117, 10130, e tra essi 9999 non compare.

Notare che la strategia del problema, euristica a parte, è stata trovare una proprietà o caratterizzazione che i numeri raggiungibili hanno e vedere se 9999 la soddisfa. In letteratura questa proprietà è chiamata *invariante* del problema. Questa è una idea che ci permette di concludere se vogliamo dimostrare il "no", se invece vogliamo dimostrare il "sì" non è sufficiente per finire, ma va costruito un esempio; per fortuna siamo nel primo caso.

Problema 2

Mostrare che non esistono numeri reali a e b che risolvano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2ab = 6(a+b) - 13, \\ a^2 + b^2 = 4, \end{cases}$$

Soluzione 1

Sommando le due equazioni otteniamo:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 6(a+b) - 13 + 4$$

$$0 = (a+b)^2 - 6(a+b) + 9 = ((a+b) - 3)^2$$

e quindi $a+b=3$. Vale allora che $ab = \frac{6(a+b)-13}{2} = \frac{5}{2}$.

Se per assurdo esistessero a, b che soddisfano il sistema e la condizione appena trovata si avrebbe $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 4 - 5 = -1$ assurdo essendo i quadrati sempre ≥ 0 .

In alternativa, si potevano sfruttare le condizioni $a+b=3, ab=\frac{5}{2}$ per scrivere:

$$5 = 2ab = 2a(3-a) = 6a - 2a^2$$

$$2a^2 - 6a - 5 = 0$$

Che è un'equazione di secondo grado con $\Delta < 0$ e quindi non ha soluzioni reali.

Soluzione 2

Partendo dalla prima equazione si ha:

$$2ab + 13 = 6(a+b)$$

$$(2ab + 13)^2 = 36(a+b)^2$$

Sostituendo $a^2 + b^2 = 4$ in $(a+b)^2$ si ha quindi:

$$(2ab + 13)^2 = 36(4 + 2ab)$$

$$4(ab)^2 - 20ab + 25 = 0$$

$$(2ab - 5)^2 = 0$$

e quindi $ab = \frac{5}{2}$. Vale allora che $a+b = \frac{2ab+13}{6} = \frac{18}{6} = 3$. Si conclude come sopra.

Commento

L'idea chiave del problema è sfruttare le quantità $a+b$ e ab , che compaiono nelle equazioni, in quanto in questo caso sono più facili da manipolare delle singole variabili. Questa è una idea “da portarsi da casa” che può rivelarsi utile quando si lavora con espressioni simmetriche in a e b (per “simmetrico” si intende che scambiando a e b nelle espressioni esse restano le stesse; ad esempio sia $a+b$ che ab che a^2+b^2 hanno questa proprietà). Si può infatti notare che entrambe le equazioni del testo sono simmetriche in a e b .

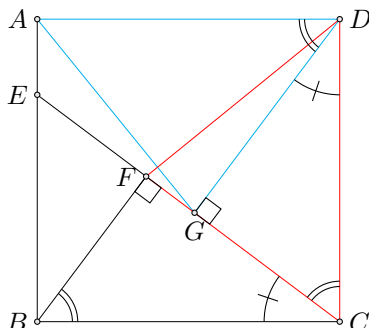
Nel problema era inoltre comodo saper riconoscere polinomi che in realtà sono quadrati, che potevano comparire in vari passaggi. Ad esempio, nei membri di sinistra delle due equazioni comparivano i termini $a^2 + b^2$ e $2ab$, che ricordano il quadrato di un binomio. Ciò poteva far venire voglia di sommare le due equazioni.

Achtung! Cercare di risolvere il sistema scrivendo tutto in funzione di una variabile non dava punti (se non arrivava a una soluzione completa) in quanto modo di procedere che rendeva il problema più difficile del testo originale, visto che si otteneva un polinomio di quarto grado.

Problema 3

Sia E un punto scelto arbitrariamente sul lato AB del quadrato $ABCD$ distinto da A e B , e siano F e G punti sul segmento CE tali che BF e DG siano perpendicolari a CE . Dimostrare che $DF = AG$.

Soluzione 1



Poiché i triangoli $\triangle BFC$, $\triangle CGD$ sono rettangoli, rispettivamente in F e G , si ha che $\angle FBC + \angle BCF = 90^\circ$, $\angle GCD + \angle CDG = 90^\circ$. Sfruttando che $\angle BCD = 90^\circ$, in quanto angolo in un quadrato, vale anche $\angle BCF + \angle GCD = 90^\circ$. Ma allora mettendo insieme queste tre relazioni, segue che $\angle FBC = \angle GCD$ e $\angle BCF = \angle CDG$.

In particolare i triangoli $\triangle BFC$, $\triangle CGD$ hanno gli stessi tre angoli. Notando che, in quanto lati di un quadrato, vale $BC = CD$ (che sono ipotenuse, quindi lati corrispondenti nei due triangoli) deve valere $\triangle BFC \cong \triangle CGD$ per il secondo criterio di congruenza. Segue allora che $FC = GD$.

Consideriamo ora i triangoli $\triangle ADG$ e $\triangle DCF$. Essi hanno $GD = FC$ per quanto detto prima. Inoltre sfruttando che $\angle CDA = 90^\circ$ e le relazioni tra angoli trovate all'inizio:

$$\angle GDA = 90^\circ - \angle CDG = \angle GCD = \angle FCD$$

Infine, notiamo che $AD = DC$ in quanto lati di un quadrato. Ma allora per il primo criterio di congruenza, $\triangle ADG \cong \triangle DCF$. Da ciò segue $AG = FD$, come voluto.

Commento

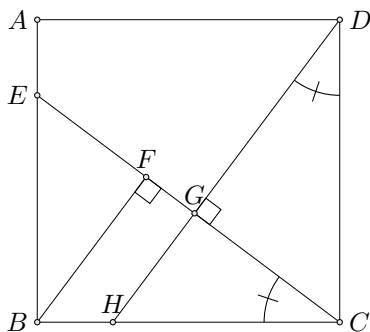
Questo è un classico problema olimpico di geometria, in cui la tesi chiede di dimostrare un'uguaglianza di segmenti. La prima idea in problemi come questo è che se è difficile ricondurre esplicitamente un segmento all'altro, potrebbe essere molto più facile lavorare con dei triangoli. Ovvero possiamo sperare che nella nostra dimostrazione il passaggio precedente a “questi due segmenti sono uguali” sia “questi due triangoli sono uguali”. Vorremmo allora trovare due triangoli che abbiano i nostri segmenti come lati corrispondenti, e dimostrare che tali triangoli sono uguali.

Prima di tutto individuiamo due candidati (con una buona figura si possono indovinare a occhio): nella soluzione sono $\triangle ADG$ e $\triangle DCF$. Poi dobbiamo pensare a come mostrare l'uguaglianza: abbiamo a disposizione i tre criteri di congruenza, che ci chiedono tutti tre elementi uguali nei due triangoli. Qua bisogna fare attenzione: se vogliamo usare questa tecnica per mostrare che due lati sono uguali, dobbiamo far sì che i nostri elementi non contengano il lato della tesi! Ad esempio sicuramente non useremo il criterio dei tre lati. Le due uguaglianze di elementi dei triangoli più semplici da individuare in questo caso erano $AD = DC$ e $\angle ADG = \angle DCF$, e ci basta mostrare uno tra $GD = FC$ e $\angle GAD = \angle FDC$. In questa configurazione risulta più semplice mostrare la prima ($GD = FC$), di nuovo sfruttando due triangoli congruenti.

Achtung! Quello appena spiegato è un ragionamento che ci porta alla soluzione “a partire dal fondo”, per scrivere una dimostrazione più corta e pulita occorre invertire l'ordine di quanto detto in questo commento.

Qualcuna di voi noterà che la configurazione sembra stranamente simmetrica... qua sotto trovate una soluzione alternativa, che non ci aspettavamo venisse trovata in gara, con un'idea più sofisticata ma istruttiva sul come sia possibile sfruttare le simmetrie di un problema di geometria.

Soluzione 2



Prolunghiamo DG fino a incontrare BC in H . Come prima troviamo $\angle BCF = \angle CDG$. Ruotiamo il quadrato di 90° rispetto al suo centro, in modo che $A \mapsto B$ (se guardiamo la figura, è in senso antiorario). Vediamo i punti della configurazione vengono mandati dalla rotazione:

- $A \mapsto B$, $B \mapsto C$, $C \mapsto D$, $D \mapsto A$: segue dalla definizione della rotazione
- $E \mapsto H$: notiamo che $E = AB \cap CE$ e che CE forma l'angolo $\angle BCF$ con BC ; invece $H = BC \cap DG$ e DG forma l'angolo $\angle CDG$ con CD . Per il punto precedente, $AB \mapsto BC$ e $BC \mapsto CD$. Per l'uguaglianza di angoli $\angle BCF = \angle CDG$ vale anche che $CE \mapsto$ "retta che forma un angolo di $\angle CDG$ con CD ", che però sappiamo essere DG (attenzione: stiamo usando anche che i segmenti sono dalla stessa parte nelle due configurazioni). Ma allora usando le definizioni dei punti come dette sopra, $E \mapsto H$.
- $F \mapsto G$: notiamo che F è la proiezione di B su CE , e analogamente G è la proiezione di C su DH . CD . Come prima, $B \mapsto C$, $CE \mapsto DH \Rightarrow F \mapsto G$.

Ma allora $DF \mapsto AG$. Poiché la rotazione è un'isometria (preserva le lunghezze dei segmenti), $DF = AG$.

Problema 4

Il numero 2025 è stato scritto sulla lavagna. Alice e Daria giocano al seguente gioco: ad ogni mossa si alternano (a partire da Alice) e sostituiscono il numero sulla lavagna con la differenza tra il numero stesso e uno dei suoi divisori. Perde chi scrive 0. Chi, delle due amiche, può assicurarsi la vittoria?

Soluzione

Vince Daria.

Mostriamo per induzione (assumendo che le giocatrici giochino in modo ottimale) la seguente proposizione:

“se sulla lavagna è scritto n vince la prima giocatrice se n è pari, la seconda se n è dispari”

Passo base: se $n = 1$ l'unico divisore è 1 e quindi la prima giocatrice deve per forza scrivere il numero $1 - 1 = 0$, perdendo.

Passo induttivo: supponiamo che la proposizione valga per tutti i k con $1 \leq k \leq n - 1$ e mostriamola per n .

- se n è pari, la prima giocatrice può scegliere come divisore 1, e lasciare alla seconda $n - 1$, che è dispari. Per ipotesi induttiva la seconda giocatrice (che sarà la prima giocatrice nel gioco che “inizia” con $n - 1$) perde, ovvero vince la prima giocatrice.
- se n è dispari, ha solo divisori dispari. Se la prima giocatrice sottrae d al primo turno, per forza lascerà $n - d$, che è un numero pari. Per ipotesi induttiva la seconda giocatrice (che sarà la prima giocatrice nel gioco che “inizia” con $n - d$) vince.

Poiché 2025 è dispari e Alice è la prima giocatrice, vince Daria.

Commento

In giochi come questo la prima cosa da fare è partire dal fondo, cercando quali condizioni (in questo caso numeri sulla lavagna) fanno certamente finire il gioco in una mossa. Una volta individuate, la strategia ottimale sarà cercare di costringere l'altro giocatore in una di quelle configurazioni. Da qui si continua a risalire. In questo processo è chiave individuare e caratterizzare le configurazioni *vincenti* (in cui vince il primo giocatore) e *perdenti* (in cui vince il secondo giocatore). Quando assumiamo che entrambi i giocatori giochino in modo ottimale:

- una configurazione è *vincente* se esiste una mossa con cui si lascia all'avversario una configurazione *perdente*
- una configurazione è *perdente* se per ogni mossa possibile si lascia all'avversario una configurazione *vincente*

Parlando più esplicitamente del problema, la prima osservazione è che l'unico caso in cui siamo obbligati a perdere è 1 (è l'unico numero che ci obbliga a scegliere come divisore sé stesso). A questo punto può essere illuminante partire dai casi piccoli (quelli in cui ci aspettiamo di arrivare ad 1 velocemente). Guardare numeri piccoli è in generale una buona strategia quando non si sa come attaccare un gioco: spesso si trovano pattern nelle configurazioni *vincenti/perdenti*. In questo caso i casi piccoli evidenziano che i dispari sono *perdenti* mentre i pari *vincenti*. A questo punto ci chiediamo: che controllo hanno Alice e Daria sulla parità dei numeri? Notiamo che perde chi scrive 0, e quindi un pari, e che se Daria gioca al meglio può fare in modo che alla lavagna si alternino numeri dispari (scritti da lei) e numeri pari (scritti da Alice), e quindi in questo modo vince sicuramente.

Per formalizzare ciò al fine di scrivere una dimostrazione, basta mostrare separatamente le due caratterizzazioni di sopra sui numeri *vincenti/perdenti*. È consigliabile usare il principio di induzione nella sua formulazione forte (mostrando il passo base e come passo induttivo che “se la tesi è vera per tutti i numeri minori di n allora è vera per n ”) per ricondursi da n a un generico caso più piccolo di n e implicitamente scendere fino a 0.

Sono stati dati punti parziali a soluzioni con idee chiave o osservazioni giuste ma in cui non erano giustificate (o non abbastanza) alcune parti principali della soluzione, tra cui

- scrivere esplicitamente la strategia di Daria
- scrivere esplicitamente che chi trova un pari vince e chi trova un dispari perde
- scrivere che Daria scrive numeri dispari e Alice numeri pari (che serve per dedurre che Daria può non scrivere mai lo 0)

Uno degli errori più comuni è stato quello di utilizzare a ogni turno i divisori di 2025, anziché i divisori del numero scritto in quel momento alla lavagna; sono stati comunque assegnati punti parziali a chi ha mostrato che in ogni le parità dei numeri scritti alla lavagna si alternano notando che quindi solo Alice potrà scrivere lo 0.

Si nota infine che questo problema non ammette in realtà una vera strategia per Alice, in quanto è sempre obbligata a togliere un numero dispari e non fa alcuna scelta.

Problema 5

Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfino

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2).$$

Soluzione

Iniziamo con alcune scomposizioni di polinomi:

$$(x - 2)(x - 4)P(x) = x(x + 2)P(x - 2)$$

Questa identità deve valere per ogni x reale. Sostituiamo ad x alcuni valori:

- $x = 2 \Rightarrow 0 = 8P(0)$
- $x = 4 \Rightarrow 0 = 24P(2)$
- $x = -2 \Rightarrow 24P(-2) = 0$

Quindi 0, 2 e -2 sono radici di $P(x)$, da cui segue per il teorema di Ruffini che, per qualche polinomio $Q(x)$, $P(x) = x(x - 2)(x + 2)Q(x)$.

(in alternativa, notare che $x(x + 2)|(x - 2)(x - 4)P(x)$ ma $MCD(x(x + 2), (x - 2)(x - 4)) = 1 \Rightarrow x(x + 2)|P(x)$ e in modo analogo notare $(x - 2)(x - 4)|P(x - 2)$, equivalente a $x(x - 2)|P(x)$, ci porta alla stessa conclusione) Riscriviamo l'identità del testo con questa nuova informazione:

$$x(x - 2)^2(x + 2)(x - 4)Q(x) = x^2(x + 2)(x - 2)(x - 4)Q(x - 2)$$

Portando tutto dalla stessa parte, $x(x - 2)(x + 2)(x - 4)((x - 2)Q(x) - xQ(x - 2)) = 0$.

Consideriamo il polinomio $R(x) = (x - 2)Q(x) - xQ(x - 2)$. L'equazione subito sopra ci dice che se x è un reale diverso da 0, 2, -2, 4, allora $R(x) = 0$. Ma allora $R(x)$ ha infinite radici ed è quindi il polinomio nullo. Quindi $(x - 2)Q(x) = xQ(x - 2)$. Di nuovo questa equazione deve valere per ogni x . Se prendiamo $x = 0 \Rightarrow -2Q(0) = 0 \Rightarrow Q(0) = 0$. Ma allora per Ruffini possiamo scrivere $Q(x) = xS(x)$ e l'identità diventa $x(x - 2)S(x) = x(x - 2)S(x - 2)$. Analogamente a come fatto con $R(x)$, otteniamo $S(x) = S(x - 2)$, ovvero S è periodico di periodo 2, da cui segue che $S(x)$ è una costante $a \in \mathbb{R}$. Allora

$$P(x) = x(x - 2)(x + 2)Q(x) = x^2(x - 2)(x + 2)S(x) = ax^2(x - 2)(x + 2)$$

Abbiamo ottenuto che se un polinomio $P(x)$ soddisfa l'equazione iniziale, allora deve essere nella forma $P(x) = ax^2(x - 2)(x + 2)$, per un certo a reale. Sostituendo nell'equazione iniziale, si verifica che ogni valore a va bene, cioè ogni polinomio in quella forma è effettivamente una soluzione.

Commento

La risoluzione del problema sfrutta fondamentalmente su due idee. La prima, che funziona abbastanza bene come "idea da portarsi a casa" per affrontare problemi di polinomi se non si hanno idee migliori, è valutare in punti opportuni e cercare qualche radice. Se le troviamo possiamo usare Ruffini, e speriamo che togliendo dei fattori il problema si semplifichi. Iterare un po' di volte questa idea permette di riscrivere $P(x)$ come prodotto di un certo $S(x)$ per alcuni monomi, che si semplificano portando all'equazione $P(x) = x^2(x - 2)(x + 2)S(x)$, $S(x) = S(x - 2)$.

Achtung! Alcune ragazze hanno notato separatamente (e correttamente) che $P(x)$ è divisibile per $x(x + 2)$ e $x(x - 2)$. Purtroppo però questo non implica che $P(x)$ sia divisibile per $x^2(x - 2)(x + 2)$, ma solo che $P(x)$ è divisibile per il minimo comune multiplo, $x(x - 2)(x + 2)$.

A questo punto entra in gioco la seconda idea importante: un polinomio non nullo non può avere infinite radici. Quindi, la condizione che abbiamo trovato su $S(x)$ è molto interessante: se $S(\alpha) = 0$, sapremo anche che $S(\alpha - 2) = 0$, quindi $S(\alpha - 4) = 0$ e così via, che ci dice $S(x)$ nullo. Per formalizzare bene le cose, occorre notare che questa idea funziona se $S(x)$ ha almeno una radice. Cosa ci garantisce che $S(x)$ abbia una radice

reale? Niente, ma basta applicare il ragionamento che abbiamo appena fatto a $S(x) - S(0)$, che sicuramente si annulla in zero, e avremo che $S(x)$ è costantemente uguale a $S(0)$.

Un errore comune è stato ottenere correttamente una scrittura del tipo $P(x) = (x - a)P_1(x)$ e poi, sostituendola al membro di sinistra (dove non c'è $P(x)$ ma $P(x - 2)$), trovare qualcosa come $(x - a)P_1(x - 2)$, oppure $(x - a - 2)P_1(x)$. Ricordatevi che $P(x - 2)$ significa: “dove vedo una x , ci metto sempre una $x - 2$ ”. (ad esempio: se $P(x) = x^2 + 3x$, allora $P(x - 2) = (x - 2)^2 + 3(x - 2) = x^2 - x - 2$).

Achtung! Molte hanno dimenticato di controllare che i polinomi trovati fossero effettivamente soluzioni. Infatti procedendo così abbiamo trovato delle condizioni necessarie che un polinomio deve soddisfare per essere soluzione. Una volta ottenuta la famiglia di polinomi della forma $ax^2(x - 2)(x + 2)$ con a costante reale, era importante anche verificare che questa forma fosse anche sufficiente per soddisfare l'equazione ovvero verificare, sostituendo $P(x) = ax^2(x - 2)(x + 2)$ nel testo, che tutti questi polinomi soddisfino l'equazione iniziale.

Problema 6

Diciamo che un numero n è *divertente* se, detti $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ tutti i suoi divisori positivi, l'insieme di differenze $\{d_2 - d_1, d_3 - d_2, \dots, d_k - d_{k-1}\}$ è una permutazione dell'insieme $\{1, 3, 5, \dots, 2k - 3\}$, ossia è l'insieme $\{1, 3, 5, \dots, 2k - 3\}$ in qualche ordine. Trovare tutti gli interi n divertenti.

Soluzione 1

Osserviamo innanzitutto che esiste un intero $1 \leq j \leq k - 1$ tale che $d_{j+1} - d_j = 1$. In particolare uno dei due è pari, dunque n è pari e di conseguenza $d_2 = 2$.

Sappiamo anche che il prodotto di due divisori in posizioni simmetriche (d_j e d_{k-j+1}) è sempre uguale ad n , quindi $d_{k-1} \cdot d_2 = n$, da cui $d_{k-1} = \frac{n}{2}$.

Ora, la massima differenza tra due divisori consecutivi di n è necessariamente $n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, in quanto tutti gli altri divisori sono minori o uguali a $\frac{n}{2}$. Di conseguenza $\frac{n}{2}$ deve corrispondere al massimo dell'insieme $\{1, 3, 5, \dots, 2k - 3\}$, perciò $\frac{n}{2} = 2k - 3$, ovvero $k = \frac{n+6}{4}$.

Vogliamo stimare d_{k-2} : per fare questo osserviamo che $d_3 \geq 5$. Infatti si verifica immediatamente che se fosse $d_3 = 3$ oppure $d_3 = 4$ allora $d_3 - d_2 = d_3 - 2$ sarebbe uguale a 1 oppure 2, che è assurdo. Questo ci dice quindi che $d_{k-2} \leq \frac{n}{5}$.

Osserviamo anche che, essendo i divisori distinti, deve aversi $d_{k-2} \geq k - 2$. Mettendo insieme le disuguaglianze otteniamo $\frac{n}{5} \geq d_{k-2} \geq k - 2 = \frac{n-2}{4}$, da cui $n \leq 10$. Si verificano a mano gli $n \leq 10$ (pari e non multipli né di 3 né di 4, cioè è sufficiente testare $n = 2$ e $n = 10$). Si verifica che $n = 2$ e $n = 10$ sono soluzioni e sono le uniche per quanto dimostrato.

Soluzione 2

L'inizio è lo stesso della prima soluzione, fino ad arrivare a $\frac{n}{2} = 2k - 3$.

Sfruttando ora la condizione del testo:

$$n - 1 = d_k - d_1 = (d_k - d_{k-1}) + (d_{k-1} - d_{k-2}) + \dots + (d_2 - d_1) = 1 + 3 + \dots + 2k - 3 = (k - 1)^2$$

Quindi $n = (k - 1)^2 + 1 = k^2 - 2k + 2$, e usando la condizione $\frac{n}{2} = 2k - 3$:

$$k^2 - 2k + 2 = 2(2k - 3) = 4k - 6 \Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0$$

Da cui segue che $k = 2, 4 \Rightarrow n = 2, 10$. Si verifica, guardandone i divisori, che soddisfano entrambi le condizioni del testo.

Commento

Achtung! Molte hanno assunto che le differenze $d_2 - d_1, \dots, d_k - d_{k-1}$ fossero ordinatamente uguali a $1, 3, \dots, 2k - 3$, ma a priori potevano non esserlo. Infatti il testo parlava di permutazione.

Il problema chiede di trovare gli interi positivi che rispettano certe condizioni. Una possibile strategia in questo caso può essere provare a dimostrare che, oltre un certo N , non ci sono più soluzioni. Questo perché gli interi positivi minori di N sono sempre in numero finito, quindi una volta fatto ciò si è sicuri che finiremo la dimostrazione: restano solo da verificare a mano alcuni (finiti) casi! La prima soluzione segue questa idea, cercando di lavorare con i divisori più grandi per ottenere delle stime su n .

La seconda soluzione conclude invece usando un'idea diversa: ci piacerebbe lavorare con i divisori, ma conosciamo solo le differenze tra due consecutivi. Per ricavare da esse i divisori, vorremmo sommare le differenze per cancellare dei termini (notiamo infatti che per ogni $1 \leq j \leq k - 1$ vale $(d_j - d_{j-1}) + (d_{j-1} - d_{j-2}) + \dots + (d_2 - d_1) = d_j - d_1 = d_j - 1$ perché i termini in mezzo si cancellano). Poiché a priori non sappiamo in che ordine sono messe le differenze, dobbiamo sommarle tutte: e siamo felici perché conosciamo chi è l'insieme di tutte le differenze. Infatti facendo la somma non importa non sapere l'ordine (la somma è commutativa). Qui l'idea generale "da portarsi da casa" è che se due insiemi di numeri sono uguali allora la somma dei loro elementi sarà uguale (così come il prodotto, il massimo, il minimo e altre quantità che non dipendono dall'ordine).

Problema 7

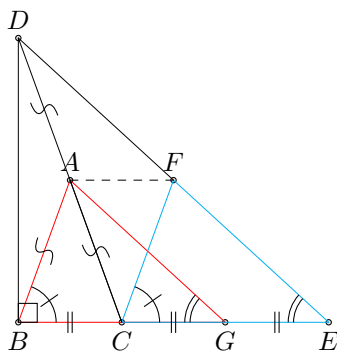
Nel triangolo isoscele ABC , con $AB = AC$, D è un punto sul prolungamento di CA tale che DB è perpendicolare a BC , E è un punto sul prolungamento di BC dalla parte di C tale che $CE = 2BC$, e F è un punto su ED tale che FC è parallelo ad AB . Dimostrare che FA è parallelo a BC .

Soluzione 1

Mostriamo prima di tutto che A è punto medio di CD . $\angle ABC = \angle ACB$ essendo $\triangle ABC$ isoscele. Dal fatto che $\triangle DBC$ è rettangolo segue che: $\angle DBA = 90^\circ - \angle ABC$, $\angle ADB = 90^\circ - \angle ACB$. Ma allora $\angle DBA = \angle ADB$ e quindi $\triangle ABC$ è isoscele. Ovvero $AD = AB = AC$, come voluto.

Sia ora G punto medio di CE . Per il teorema dei punti medi applicato al triangolo ED si ha $AG \parallel DE$ e quindi $\angle AGB = \angle FEC$ (angoli formati da due rette parallele tagliate da una stessa trasversale). Analogamente $AB \parallel FC$ (per ipotesi) $\Rightarrow \angle ABG = \angle FCE$.

Consideriamo ora i triangoli $\triangle ABG$ e $\triangle FCE$. Per quanto detto adesso $\angle AGB = \angle FEC$, $\angle ABG = \angle FCE$. Inoltre per ipotesi, $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BE} = \overline{CE}$. Quindi per il secondo criterio di congruenza, $\triangle ABG \cong \triangle FCE$. Ma ciò implica $AB = FC$. Ma vale anche $AB \parallel FC$ (per ipotesi), da cui segue che $ABCF$ è un parallelogramma e quindi in particolare $AF \parallel BC$.



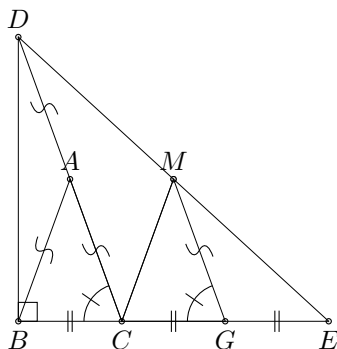
Soluzione 2

Notiamo che A è punto medio di CD come sopra.

Sia ora G punto medio di CE e M punto medio di ED . Per il teorema dei punti medi applicato al triangolo $\triangle CED$ si ha $AM \parallel CE$, ovvero $AM \parallel BC$. Sempre per il teorema dei punti medi vale $MG \parallel CD$ e $\overline{MG} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{AC}$.

Consideriamo ora i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle MCG$. Per quanto detto adesso $AC = MG$ e per $AC \parallel MG$ $\angle ACB = \angle MGC$. Inoltre per ipotesi, $\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{BE} = \overline{CG}$. Quindi per il primo criterio di congruenza, $\triangle ABC \cong \triangle MCG$, che implica $\angle ABC = \angle MGC$. Ma allora si ha $AB \parallel MC$.

Quindi $FC \parallel AB \parallel MC$, da cui segue che MC e FC sono sulla stessa retta e quindi $F = M$. Ma allora $AF = AM \parallel BC$ per quanto detto sopra.

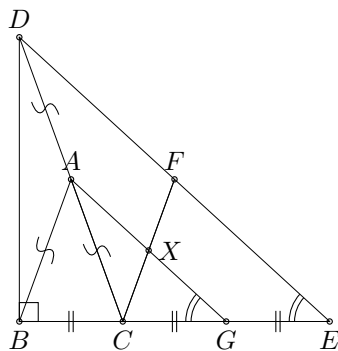


Soluzione 3

Notiamo che A è punto medio di CD come sopra. Come nella prima soluzione, detto G il punto medio di CE , vale $AG \parallel DE$.

Sia ora $X = FC \cap AG$. Guardiamo il triangolo $\triangle ABG$. $CX \parallel AB$ (per ipotesi) e C è punto medio di BG (per ipotesi $\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{BE} = \overline{CG}$). Ma allora per il teorema dei punti medi (visto al contrario) anche X è un punto medio, di AG . Ma allora, se consideriamo l'omotetia in C di rapporto 2, che mi manda $A \mapsto D$, $G \mapsto E$ si ha $X \mapsto F$ (perché $X = AG \cap CF$, $AG \mapsto ED$, $CF \mapsto CF$ e quindi $X \mapsto ED \cap CF = F$) e quindi F punto medio di ED (perché lo era X di AG).

A questo punto si conclude per teorema dei punti medi applicato a $\triangle CDE$: $AF \parallel BE \Rightarrow AF \parallel BC$.



Commento

In questo problema ci sono varie strade per arrivare alla tesi che sono allo stesso livello di difficoltà. Gli ostacoli del problema stanno nel capire come dimostrare le intuizioni che si possono avere dalla figura, perché la dimostrazione sembra in un certo senso avvenire al contrario. Ad esempio per quanto riguarda il punto A : si trova sull'ipotenusa del triangolo $\triangle BCD$ e $\triangle ABC$ è isoscele: ci aspettiamo questa proprietà dal punto medio di CD (perché il punto medio dell'ipotenusa è il centro della circonferenza circoscritta a $\triangle BCD$), ma non è una conseguenza immediata. Qualsiasi strada si segua, è necessario riflettere bene su cosa vorremmo che fosse vero e quali ipotesi abbiamo.

Per concludere la dimostrazione era inoltre necessario aggiungere almeno un punto. Aggiungere un punto in un problema di geometria può essere rischioso, ma può anche essere la chiave che ci permette di formalizzare un'intuizione. Un'immagine (o una soluzione) vale più di mille parole quindi si rimanda alle soluzioni per degli esempi.

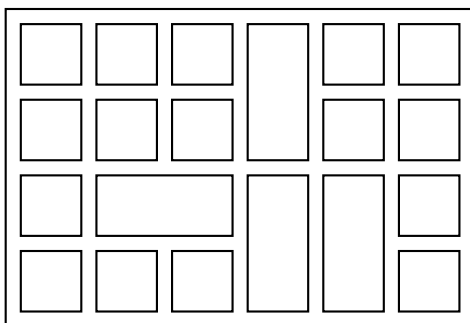
Nella seconda soluzione compare un'idea aggiuntiva: supponiamo che la tesi abbia a che fare con le proprietà di punto in particolare (in questo caso F). La tecnica dimostrativa che si usa consiste nel definire un secondo punto che soddisfa la tesi e a partire da quello mostrare che coincide col punto originario. Questa strada si può rivelare utile quando la tesi sembra più forte (o comunque più facile da maneggiare) delle ipotesi.

Come curiosità: scegliendo il riferimento giusto, e in assenza di idee migliori, il problema poteva essere risolto più o meno comodamente usando le coordinate cartesiane.

Problema 8

L'EGMO Camp si svolgerà in un *quartiere pisano*. Un *quartiere pisano* ha sempre forma rettangolare, le vie sono tutte parallele ai lati del rettangolo e tutti gli isolati (agglomerati di edifici non attraversati da strade) hanno forma rettangolare. Si veda la figura per un esempio. Nel *quartiere pisano* dove si svolgerà lo stage ci sono S strade (intese come vie di lunghezza massimale, ossia tali che ai due estremi incontrino o il confine

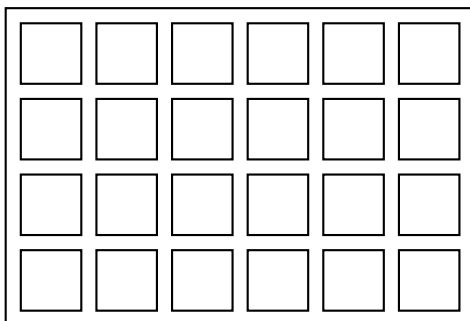
di un isolato o il confine del quartiere), I isolati, X incroci-a-quattro-braccia , e T è il numero di incroci-a-T . Per esempio, nel quartiere qui sotto, ci sono 15 strade, 8 incroci-a-quattro-braccia, 20 isolati e 22 incroci-a-T.



Dimostrare che, indipendentemente dalla forma del quartiere, $S + X = I + 3$.

Soluzione 1

Consideriamo una griglia $n \times m$ di isolati quadrati come in figura, che chiaramente costituisce un esempio di quartiere pisano.



In questa configurazione l'equazione della tesi è soddisfatta, infatti abbiamo:

- $S = (n + 1) + (m + 1)$ strade
- $I = nm$ isolati
- $X = (n - 1)(m - 1)$ incroci-a-quattro-braccia

E quindi:

$$S + X = n + m + 2 + nm - n - m + 1 = nm + 3 = I + 3$$

Si può dimostrare che ciascun quartiere pisano si può ottenere da una griglia $n \times m$ come quella di sopra operando un numero finito di mosse del tipo “si prende un pezzo minimale di via (uno compreso tra due incroci adiacenti, ovvero senza incroci nel segmento che li unisce) e lo si toglie, incollando tra loro i due isolati che delimitava”, con l'accortezza che a ogni step rimanga la proprietà che tutti gli isolati del quartiere

sono rettangolari.

Per dimostrare questo fatto basta mostrare che possiamo ottenere ciascun rettangolo $h \times k$ in una qualche posizione della nostra griglia $n \times m$ con mosse di questo tipo. Le mosse da fare sono:

- prima si uniscono insieme tutti gli isolati di una stessa colonna per formare tanti isolati adiacenti e paralleli di dimensioni $h \times 1$
- poi si incollano tra loro questi k isolati eliminando le vie (di lunghezza h nella griglia) che separano due isolati $h \times 1$ adiacenti

Verifichiamo ora che, comunque si compia una mossa su un quartiere pisano che soddisfa la relazione della tesi, quest'ultima continua a valere anche dopo la mossa. Supponiamo che nel quartiere originario ci siano S strade, I isolati, X incroci-a-quattro-braccia e dopo la mossa tali valori diventino S', I', X' . La mossa toglie un pezzo di via tra due incroci, quindi occorre distinguere i casi. In tutti i casi si avrà $I' = I - 1$ perché stiamo comunque accorpando due isolati e quindi il numero totale diminuisce.

- i due incroci che ha come estremi sono incroci-a-T: Per mantenere la proprietà che tutti gli isolati sono rettangolari, la nostra via dovrà corrispondere ai due bracci trasversali delle due T. Ma allora $S' = S - 1$ (la via rimossa era anche una strada), $X' = X$ (non sono stati toccati incroci-a-quattro-braccia).
 $\Rightarrow S' + X' = S + X - 1 = I + 3 - 1 = I' + 3$
- i due incroci che ha come estremi sono incroci-a-quattro-braccia: allora $S' = S + 1$ (rimuovere la via spezza la strada in due strade; il numero totale aumenta di 1), $X' = X - 2$ (abbiamo rimosso due incroci-a-quattro-braccia trasformandoli in incroci-a-T)
 $\Rightarrow S' + X' = S + X + 1 - 2 = S + X - 1 = I + 3 - 1 = I' + 3$
- i due incroci che ha come estremi sono uno a-T e uno a-quattro-braccia: di nuovo la via corrisponde al braccio trasversale della T. Allora $S' = S$ (rimuovere la via accorcia una strada ma non la elimina), $X' = X - 1$ (abbiamo rimosso un incrocio-a-quattro-braccia trasformandolo in uno a-T).
 $\Rightarrow S' + X' = S + X - 1 = I + 3 - 1 = I' + 3$

Abbiamo quindi mostrato che: (1) la tesi è soddisfatta per la griglia $n \times m$ (2) ogni quartiere pisano si può ottenere dalla griglia con una serie di mosse e (3) se si compie una mossa su un quartiere su cui vale la tesi, essa vale anche dopo la mossa. Allora per induzione (sul numero di mosse compiute), l'uguaglianza vale in ogni quartiere pisano.

Soluzione 2

Ricaviamo due equazioni che messe insieme ci daranno la tesi:

- contiamo in due modi la quantità Q_1 = “numero totale di vertici degli isolati”:
 - gli isolati sono rettangolari, quindi ciascun isolato ha 4 vertici, che sono vertici di uno e un solo isolato: $Q_1 = 4I$
 - ciascun vertice è in esattamente un incrocio. Ci sono 4 incroci con 1 vertice (gli angoli del quartiere), T incroci con 2 vertici (gli incroci-a-T), X incroci con 4 vertici (incroci-a-quattro-braccia). Chiaramente non esistono incroci con 3 vertici (né più di 4). Mettendo tutto assieme:
 $Q_1 = 4 + 2T + 4X$

Quindi vale: $4I = 4 + 2T + 4X \Rightarrow 2I = 2 + T + 2X$

- contiamo in due modi la quantità Q_2 = “numero totale di estremi di una strada”:
 - ciascuna strada ha due estremi, che sono estremi di solamente quella strada: $Q_2 = 2S$
 - gli estremi di una strada sono sempre parte di un incrocio. Dividendo i casi: nei 4 angoli del quartiere ci sono due estremi di strada ciascuno; negli incroci-a-T termina solo una strada (quella che ci va a sbattere trasversalmente); negli incroci-a-quattro-braccia non terminano strade. Quindi
 $Q_2 = 8 + T$ Quindi vale $2S = 8 + T \Rightarrow T = 2S - 8$.

Mettendo assieme le due equazioni:

$$\begin{aligned}2S - 8 &= T = 2I - 2X - 2 \\ S + X &= I + 3\end{aligned}$$

Soluzione 3

Utilizziamo la formula di Eulero per i grafi planari: $F + V = 2 + A$ dove F sono le facce, V i vertici/nodi, A gli archi.

Consideriamo un grafo in cui i nodi sono tutti e soli gli incroci uniti agli angoli del quartiere, e gli archi sono i pezzi minimali di via tra essi (due nodi sono collegati da un arco se e solo se il segmento che li unisce è parte di una strada, ovvero non interseca isolati, e non incontra altri incroci).

Per definizione i nodi sono: $V = T + X + 4$.

Le facce sono quindi gli isolati, a cui va aggiunta la faccia esterna: $F = I + 1$.

Otteniamo allora che gli archi sono: $A = F + V - 2 = I + 1 + 4 + T + X - 2 = T + X + I + 3$.

Contiamo adesso gli archi in un altro modo, sfruttando i loro estremi.

- gli estremi degli archi sono $2A$ (ciascun arco ha due estremi che sono estremi di solo quell'arco), gli estremi delle strade sono $2S$ (stesso motivo)
- guardando i nodi:
 - ciascuno dei 4 angoli del quartiere è estremo di due archi, che sono anche estremi di due strade
 - ciascun incrocio-a- T è estremo di tre archi, uno dei quali (quello trasversale) corrisponde anche all'estremo di una strada
 - ciascun incrocio-a-quattro-braccia è estremo di quattro archi, nessuno dei quali corrisponde anche all'estremo di una strada

Quindi se contiamo gli estremi di un arco che non siano anche estremi di una strada otteniamo:

$$2A - 2S = 2T + 4X \Rightarrow A = S + T + 2X$$

Uguagliando le due espressioni per A :

$$S + T + 2X = T + X + I + 3 \Rightarrow S + X = I + 3$$

Commento

Questo è il problema più difficile della gara, e lo si può vedere dalla complessità delle soluzioni. Vediamo qua sopra due approcci di soluzione.

Nel primo, l'idea chiave è partire da una situazione che sappiamo trattare bene e cercare di ricondursi in alcune "mosse" al caso generale, sperando di dimostrare che la relazione della tesi non venga variata dalla mossa. Il vantaggio di fare così è che a ogni step abbiamo a che fare con modifiche piccole, che speriamo di saper gestire facilmente. Achtung! Sebbene sia vero in questo caso, non sempre è possibile ricondursi da un caso particolare a tutti i casi generali: dimostrare ciò è un passaggio importante nella dimostrazione.

Nel secondo approccio, l'idea chiave è che un incrocio ha un "ruolo" sia in relazione alle strade che agli isolati: infatti contiene sempre degli estremi di vie (e a volte di strade) e dei vertici di isolati. Visto che la tesi chiede di mettere in relazione le quantità di incroci, strade e isolati, vorremmo sfruttare il ruolo molteplice che hanno gli incroci per ricavare delle equazioni. Il nome che si trova in letteratura per questa tecnica è "double counting": fissiamo una quantità e troviamo due modi per contarla. Le due espressioni ottenute così dovranno chiaramente essere uguali (visto che stanno contando la stessa cosa!).

Non c'è una regola da seguire per le quantità da prendere in considerazione: occorre solo riflettere sul problema e su quali quantità possiamo interpretare in due modi (in questo caso la prima intuizione che ci guida è quella scritta a proposito degli incroci). Bisogna inoltre farsi furbe: a volte non basta contare qualcosa in due modi ma anche capire cosa vogliamo fare con le ripetizioni: contiamo ogni oggetto solo una volta o tante volte quante compare? Ci sono casi in cui conviene uno e casi in cui l'altro, l'importante è essere coerenti. Degli esempi di questa accortezza si trovano nella seconda e terza soluzione.