Algebra – Problemi di Ammissione

1. Determinare la più piccola costante C tale che, per ogni coppia di interi positivi $x \neq y$, sia soddisfatta la seguente condizione :

$$\min(\{\sqrt{x^2+2y}\}, \{\sqrt{y^2+2x}\}) < C$$

dove $\{x\}$ è la parte frazionaria di x. Ad esempio $\{2.42\} = 0,42$.

2. Sia $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ una successione di numeri reali non negativi con $c_{2025} > 0$. Una successione di polinomi è definita nel seguente modo:

$$P_{-1}(x) = 0 \ , \ P_0(x) = 1 \ , \ P_{n+1}(x) = xP_n(x) + c_n P_{n-1}(x).$$

Dimostrare che non esiste nessun intero $n > 2025$ per cui

$$P_{2n}(x) = P_n(x^2 + c)$$

per un qualche numero reale c.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione per cui esiste una costante $K > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ per ogni $x, y \in [0,1]$. Supponiamo inoltre che per ogni numero razionale $r \in [0,1]$, esistano interi a e b tali che $f(r) = a + br$. Dimostrare che esistono finiti intervalli $I_1, \ldots, I_n$ tali che f è una funzione lineare in ciascun intervallo I_i e $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$.