Allenamenti EGMO 2025 – Booklet

30 dicembre 2024

Indice

Primo Allenamento - Problemi

A1. Siano a, b, c tre numeri positivi dispari distinti e minori di 100. Quanto può essere, al massimo, il loro massimo comune divisore?

B1. Alice inizia a scrivere su un foglio dei numeri interi. Decide che si fermerà quando sul foglio saranno scritti due numeri la cui somma oppure differenza abbia come ultima cifra 0. Quanti numeri scriverà, al massimo, sul foglio?

Sostituendo nel testo "ultima cifra 0" con "ultime due cifre 00" quanto vale il nuovo massimo?

C1. In un quadrilatero convesso $ABCD$ vale che $AB = BC = CD$. Inoltre $AC = BD = AD$. Calcolare l'angolo $\angle ADC$.

D1. Dimostrare che ogni numero intero n può essere scritto nella forma

$$n = a^2 + b^2 - c^2$$

dove a, b, c sono opportuni numeri interi.

Primo Allenamento - Soluzioni

A1. Siano a, b, c tre numeri positivi dispari distinti e minori di 100. Quanto può essere, al massimo, il loro massimo comune divisore?

A1. Chiamiamo d il massimo comun divisore (positivo) dei tre numeri e supponiamo senza perdita di generalità che $a < b < c$. Allora potremo scrivere $a = dx, b = dy, c = dz$ dove $x < y < z$ sono interi positivi. Poiché i numeri sono dispari, tutti e quattro i d, x, y, z sono dispari. In particolare, poiché $x < y < z$ e x, y, z sono dispari positivi, $x \geq 1, y \geq 3, z \geq 5$. Ma allora $c < 100 \Rightarrow d = \frac{c}{z} < \frac{100}{5} = 20$, da cui segue $d \leq 19$.
Una costruzione con $d = 19$ esiste: basta infatti prendere (in modo analogo a sopra) $a = 19, b = 19 \cdot 3, c = 19 \cdot 5$, che soddisfano chiaramente a, b, c dispari e $MCD(a, b, c) = 19$.

B1. Alice inizia a scrivere su un foglio dei numeri interi. Decide che si fermerà quando sul foglio saranno scritti due numeri la cui somma oppure differenza abbia come ultima cifra 0. Quanti numeri scriverà, al massimo, sul foglio?

Sostituendo nel testo "ultima cifra 0" con "ultime due cifre 00" quanto vale il nuovo massimo?

B1. **Risposta:** 7 nel primo caso, 52 nel secondo.

Primo caso: La prima osservazione da fare è che non ci interessano davvero i numeri che Alice scrive, ma solo le loro cifre finali. Consideriamo quindi solo loro e vediamo la situazione subito prima che Alice si fermi. Ovvero, se si ferma dopo aver scritto k numeri, vediamo quali potevano essere i $k-1$ numeri scritti subito prima.

Nessuna cifra può comparire due volte (o la differenza dei due numeri corrispondenti finirebbe con 0), quindi senza perdita di generalità quando Alice si ferma ha scritto sul foglio un qualche sottoinsieme dei numeri $0, 1, \ldots, 9$.

Notiamo ora che le uniche coppie di numeri distinti che hanno somma che finisce con 0 sono $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$. Quindi possiamo avere al più un numero da ciascuna coppia, più il 5 e lo 0 che non sono in nessuna coppia. In totale Alice ha quindi scritto al più 4+1+1 = 6 numeri.

Notiamo che se ha scritto 6 numeri prendendoli come sopra, allora qualsiasi numero aggiunga la obbliga a fermarsi (o completa una coppia, e quindi ha una coppia con somma che termina per 0, o ha un duplicato, e quindi ha una coppia con differenza che termina per 0). Quindi quando Alice si ferma ha scritto al più 6+1 = 7 numeri.

Secondo caso: La soluzione si può riciclare totalmente a meno di vedere come cambiano i valori numerici: adesso ci interessano le ultime 2 cifre, quindi invece di guardare i numeri $0, 1, \ldots, 9$ dobbiamo guardare i numeri $0, 1, \ldots, 99$. Le coppie di numeri distinti con somma 100 sono $\{1, 99\}, \{2, 98\}, \ldots, \{49, 51\}$, quindi sono 49 coppie e quando Alice si ferma, con un conto analogo a prima, può aver scritto al più $49+1+1+1 = 52$ numeri.

Commento 1: Fate attenzione a cosa chiede di preciso il testo! Alcune di voi hanno trovato la strada giusta, ma il testo chiedeva quanti numeri sono scritti sul foglio *dopo* che Alice si è fermata, quindi le risposte sono 7 e 52 invece di 6 e 51.

Commento 2: l'idea che di un numero ci interessa guardare solo la sua cifra finale (o le ultime 2 cifre) corrisponde a guardare il resto della sua divisione per 10 (rispettivamente 100), o in linguaggio tecnico, a guardare tale numero "modulo 10" (rispettivamente 100). Se non avete mai sentito parlare di aritmetica modulare, vi consigliamo di leggere il Booklet degli Allenamenti EGMO del 2018, sezione 4.4, oppure di vedere la lezione corrispondente sulla pagina Il Senior in Pillole.

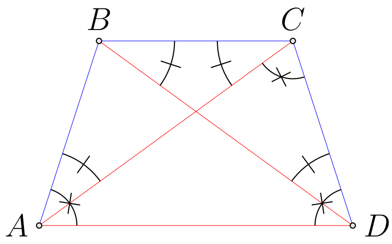
Commento 3: questo problema racchiude un'idea interessante, che si vede in numerosi problemi delle olimpiadi: il principio dei cassetti, anche noto come principio della piccionaia o pigeonhole. La sua formulazione classica è la seguente:

"Se ho $n+1$ oggetti e n cassetti in cui metterli, ci sarà almeno un cassetto che contiene almeno 2 oggetti"

Si può chiaramente generalizzare a n oggetti e k cassetti, e allora ci sarà almeno un assetto che contiene almeno $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ oggetti ($\lceil x \rceil$ indica il minimo intero $\geq x$, chiamata la sua parte intera superiore).
Nella prima formulazione (somma delle cifre 0) i "cassetti" sono le coppie con somma delle cifre 0, mentre gli "oggetti" sono le cifre da 0 a 9.
Potete trovare altri esercizi ed esempi sul principio dei cassetti nel Booklet degli Allenamenti EGMO 2018, sezione 2.3. oppure sempre sulla pagina Il Senior in Pillole.

C1. In un quadrilatero convesso $ABCD$ vale che $AB = BC = CD$. Inoltre $AC = BD = AD$. Calcolare l'angolo $\angle ADC$.

C1. Soluzione 1: (segmenti uguali hanno colori uguali nella figura)



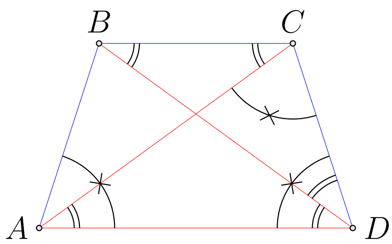
Notiamo intanto che $\triangle ACD \cong \triangle DAB$ perché hanno i lati congruenti per ipotesi ($AC = AD$, $CD = AB$, $AD = BD$). Inoltre sono isosceli per ipotesi, rispettivamente con basi CD e AB. In modo analogo $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ e sono isosceli di basi rispettivamente AC e BD.
Chiamiamo ora $x = \angle ADC$ e $y = \angle CAB$. Da quanto detto sopra sui triangoli $\triangle ACD, \triangle DAB$ segue $\angle DAB = \angle ACD = \angle ADC = x$ mentre dalle considerazioni su $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$ segue $\angle DBC = \angle CDB = \angle ACB = \angle CAB = y$.
Il triangolo $\triangle ACD$ ha quindi angoli

$$\angle ACD = x \quad \angle ADC = x \quad \angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = x - y$$

E allora prendendone la somma si ha $3x - y = 180°$.
In modo analogo il triangolo $\triangle BCD$ ha invece angoli

$$\angle DBC = y \quad \angle CDB = y \quad \angle BCD = \angle ACB + \angle DCA = y + x$$

E allora prendendone la somma si ha $x + 3y = 180°$.
Mettendo assieme le due equazioni in x, y si ha $x = 72°$.
Soluzione 2:



Come nell'altra soluzione, si ha $\triangle ACD \cong \triangle DAB$, isosceli di basi rispettivamente CD e AB, e $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, isosceli di base AC e BD. In particolare, si ha $\angle ABD = \angle ACD$, da cui segue che $ABCD$ è ciclico.

Sfruttando la ciclicità, $\angle CBD = \angle CAD$. Usando le congruenze dei triangoli, si ha però anche $\angle CAD = \angle ADB \Rightarrow \angle CBD = \angle ADB$, da cui segue che $BC \parallel AD$ (gli angoli uguali sono alterni interni nelle due parallele).
Per concludere, osserviamo che da triangoli isosceli e ciclicità seguono le uguaglianze $\angle ACD = \angle ADC$ e $\angle CBD = \angle BDC = \angle BCA = \angle ADB$. Da ciò segue $\angle ACD = \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 2\angle ADB$.
Infine osserviamo che $\angle BCD + \angle ADC = 180°$ per il parallelismo $BC \parallel AD$, da cui segue:

$$\begin{aligned} 180° &= \angle BCD + \angle ADC = \\ &= \angle ACB + \angle ACD + \angle ADC = \\ &= \angle ADB + 2\angle ADB + 2\angle ADB = \\ &= 5\angle ADB & \Rightarrow \angle ADB = \frac{180°}{5} = 36° \end{aligned}$$

Commento: La chiave del problema era non perdersi nei conti d'angoli: c'erano molti passaggi brevi ma bisognava fare attenzione a dimostrare le cose con ordine. Alcune soluzioni che abbiamo ricevuto si perdevano proprio a causa di questo.
Inoltre questo problema (o meglio la seconda soluzione) è un chiaro esempio della tecnica nota come *angle-chasing*: usare ciclicità e parallelismi per spostare angoli nella figura è forse una delle tecniche più utili e versatili tra quelle di "geometria olimpionica". Spesso basta solo questo per risolvere un problema, quindi è utilissimo imparare a vederle velocemente relazioni come quelle usate nelle soluzioni.

D1. Dimostrare che ogni numero intero n può essere scritto nella forma

$$n = a^2 + b^2 - c^2$$

dove a, b, c sono opportuni numeri interi.

D1. Se n è dispari possiamo scrivere $n = 2k + 1$, e allora vale l'identità:

$$n = (k+1)^2 + 0^2 - k^2$$

Se n è pari possiamo scrivere $n = 2k$, e allora vale l'identità:

$$n = k^2 + 1^2 - (k-1)^2$$

Commento 1: nonostante la soluzione sia sorprendentemente corta, il problema è tutt'altro che semplice da affrontare. La prospettiva da cui guardare il problema è la seguente: "come possiamo costruire degli a, b, c tali che $a^2 + b^2 - c^2$ sia uguale a n?" C'erano vari modi di arrivare a una risposta (sopra ne vedete uno). Delle idee che potevano venire in mente consistevano nel sostituire uno tra a, b, c con una costante "semplice" come 0 o 1, oppure cercare di scrivere a, b, c in funzione di n. Una volta capito che bisognava solo aggiustare i termini, si trattava solo di giocare un po' con l'algebra facendo i casi: i tentativi più naturali sono quelli con a, b, c "vicini" ad n (ad esempio degli $n + k$ o degli n/k). Una volta fissato uno dei numeri di questa forma, il gioco sta nel trovare dei valori per gli altri due che annullino i termini in eccesso.

Commento 2: molte di voi hanno cercato di procedere per induzione, finendo spesso col fare errori. Il principio di induzione raramente è una cattiva idea, ma ci sono casi in cui ha più speranza di funzionare che altri: in questo caso il motivo per cui tendenzialmente non funziona è che è difficile passare dall'espressione per n a una per $n + 1$ (gli unici quadrati perfetti consecutivi sono 0 e 1 quindi bisogna essere in grado di aggiustare i termini in eccesso che potevano uscire provando a cambiare di poco uno tra a, b, c). Lavorare direttamente con a, b, c era più agevole perché si potevano aggiustare i termini "a proprio piacimento".

Commento 3: Anche qua attenzione al testo! Il problema chiedeva di dimostrare la tesi per ogni n *intero*, non naturale! La tesi andava quindi mostrata anche per gli n negativi.

Secondo Allenamento - Problemi

A2. Per quante coppie (p, q) di numeri primi (positivi) il polinomio $x^2 + px + q$ ha due radici intere?
Nota: si ricorda che 1 non è un numero primo

B2. Qual è la cifra delle unità di $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8$? E di $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2025}$?

C2. Sia ABC un triangolo tale che l'angolo $\angle ACB = 60°$. Sia M il punto medio del lato AB e siano H e K i piedi delle altezze che partono da B e da A rispettivamente. Dimostrare che il triangolo HMK è equilatero.

D2. Trovare tutti i numeri interi $n \geq 2$ con la proprietà che esistano due permutazioni $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dei numeri $1, 2, ..., n$ tali che

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n$$

siano interi consecutivi.
Nota: per permutazione dei numeri $1, \ldots, n$ si intende un modo di ordinarli: ad esempio $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(1, 4, 3, 5, 2)$ e $(5, 4, 3, 2, 1)$ sono tutte permutazioni dei numeri $1, 2, 3, 4, 5$.

Secondo Allenamento - Soluzioni

A2. Per quante coppie (p, q) di numeri primi (positivi) il polinomio $x^2 + px + q$ ha due radici intere?
Nota: si ricorda che 1 non è un numero primo

A2. Siano a e b le radici del polinomio. Allora:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x - ab = x^2 + px + q$$

Da questo otteniamo: $a + b = -p$ e $ab = q$.
Essendo q un numero primo, le uniche due possibili soluzioni sono $a = 1$ e $b = q$; 2) $a = -q$ e $b = -1$ (senza perdita di generalità possiamo assumere $a < b$), dal momento che q primo non ha divisori propri. Vediamo i casi

i) se $a = 1$ e $b = q$, allora $-p = 1 + q$, che non ha soluzioni per $p, q > 0$ (le due espressioni nell'equazione son una positiva e una negativa).

ii) se $a = -q$ e $b = -1$, allora $p = 1+q$, da cui osserviamo che p e q devono essere due primi consecutivi: in particolare uno dei due dovrà essere pari ed essendo 2 l'unico primo pari otteniamo che l'unica soluzione è $p = 3$ e $q = 2$, da cui deduciamo che il problema ha una sola soluzione.

Commento Oltre al notare le proprietà dei numeri primi, l'idea di questo problema è di trovare una relazione tra i coefficienti e le radici del polinomio. Sebbene qua ci possiamo accontentare di quelle per il grado 2, in realtà queste relazioni si trovano per qualsiasi grado e sono note come formule di Viète. È utile tenerle a mente in qualsiasi problema sui polinomi quindi vi consigliamo di provare a trovarvi esplicitamente l'espressione del coefficiente di x^k un polinomio di grado n supponendo che il polinomio abbia n radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

B2. Qual è la cifra delle unità di $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8$? E di $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2025}$?

B2. Risposta: rispettivamente 0 e 2.
Osserviamo innanzitutto che le cifre delle unità dei numeri della forma 2^n con $n > 0$ ciclano in modo periodico con periodo 4: $2^1 \to 2$, $2^2 \to 4$, $2^3 \to 8$, $2^4 \to 16$, $2^5 \to 2$, $2^6 \to 4 \ldots$ Ovvero la cifra delle unità di 2^n dipende solo dal resto di n nella divisione per 4.
Da qui ci sono due modi di procedere:
Soluzione 1. Notiamo che la somma su un periodo è $2 + 4 + 8 + 6 = 20$ che ha cifra finale 0. Quindi quando calcoliamo $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$ possiamo "cancellare" tutti i blocchi da 4 lasciando solo quelli dovuti al resto che dà n nella divisione per 4. $8 = 4 \cdot 2$ quindi $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 \to 2 \cdot 0 = 0$. Invece $2025 = 4 \cdot 506 + 1$ quindi $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2025} \to 506 \cdot 0 + 2 = 2$.
Soluzione 2. Usando che l'espressione del testo è una serie geometrica:

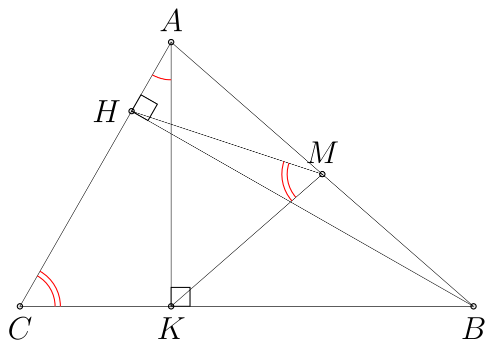
$$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

quindi possiamo considerare quest'ultima espressione invece di quella iniziale. $9 = 4 \cdot 2 + 1$ quindi $2^9 - 2 \to 2 - 2 = 0$. Invece $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ quindi $2^{2025} - 2 \to 4 - 2 = 2$.

Commento Questo problema aveva nuovamente come idea dietro quella di guardare i numeri modulo 10 (anche se nella soluzione l'espressione non compare esplicitamente, ma è nascosta dietro il parlare di ultime cifre). La proprietà che le potenze di 2 abbiano resti periodici modulo 10 da un certo punto in poi vale infatti se a 2 e 10 sostituiamo qualsiasi numero e può essere utile per lavorare in problemi (come questo) in cui serve guardare potenze molto grandi.
Se volete saperne di più di come si comportano le potenze di un numero modulo un altro, vi consigliamo di leggere il Booklet degli Allenamenti EGMO del 2018, sezione 4.7, oppure di vedere la lezione di Teoria dei Numeri "N1-Basic" di uno dei vecchi Senior (archivio delle videolezioni).

C2. Sia ABC un triangolo tale che l'angolo $\angle ACB = 60°$. Sia M il punto medio del lato AB e siano H e K i piedi delle altezze che partono da B e da A rispettivamente. Dimostrare che il triangolo HMK è equilatero.

C2. Nel disegno la doppia linea indica 60° e la singola 30°.



Innanzitutto notiamo che $\angle AHB = 90° = \angle AKB \Rightarrow AHKB$ ciclico con diametro AB.
Di conseguenza posso affermare che M, il punto medio di AB, è il centro della circoscritta ad $AHKB$, in particolare:
$HM = KM$, perché sono entrambi raggi della circonferenza;
$\angle HMK = 2\angle HAK$, perché sono angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono su HK. Sappiamo inoltre che:

$$\angle HAK = \angle CAK = 90° - \angle KCA = 90° - 60° = 30°$$

Da cui si ricava che $\angle HMK = 2\angle HAK = 60°$.
Del triangolo $\triangle HMK$ sappiamo quindi che è isoscele $(HM = KM)$ e che $\angle HMK = 60°$, perciò $\angle KHM = \angle MKH = 60°$, ovvero $\triangle HMK$ è equilatero.

Commento Ci sono tante soluzioni (parzialmente) diverse da quella mostrata, ma questa è probabilmente la più semplice e pulita.
In particolare diverse soluzioni possono passare dal calcolo degli angoli $\angle MHK$ e $\angle HKM$ come somma di angoli (ad esempio $\angle MHK = \angle MHB + \angle BHK = \angle MBK + \angle BAK$, somma che si dimostra essere 60°); spesso in questi casi, e più in generale in molte soluzioni in cui si usano angoli che non sono quelli segnati in figura, in una soluzione perfetta andrebbero trattati entrambi i due casi $\triangle ABC$ acutangolo o ottusangolo, oppure usati gli angoli orientati.
Era possibile risolvere il problema anche senza utilizzare le ciclicità, ma è importante capire anche la soluzione mostrata.

D2. Trovare tutti i numeri interi $n \geq 2$ con la proprietà che esistano due permutazioni $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dei numeri $1, 2, ..., n$ tali che

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n$$

siano interi consecutivi.
Nota: per permutazione dei numeri $1, \ldots, n$ si intende un modo di ordinarli: ad esempio $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(1, 4, 3, 5, 2)$ e $(5, 4, 3, 2, 1)$ sono tutte permutazioni dei numeri $1, 2, 3, 4, 5$.

D2. Risposta: tutti e soli gli $n \geq 3$ dispari.
Mostriamo innanzitutto che la condizione che n sia dispari è condizione necessaria. Se i numeri a_i con $1 \leq i \leq n$ coprono tutti i numeri da 1 a n in particolare $a_1 + \cdots + a_n = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Analogamente vale che $b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n+1)}{2}$. D'altra parte, i numeri $a_i + b_i$ con $1 \leq i \leq n$ per ipotesi coprono tutti i numeri da k a $k+n-1$ per qualche k intero. Quindi $(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = k + \cdots + (k + n - 1) = nk + \frac{n(n-1)}{2}$.
Abbiamo quindi due modi per calcolare la somma $a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n$. Uguagliando le espressioni si ha:

$$2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = nk + \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n+3}{2}$$

e quindi, affinché k sia intero, n deve essere dispari.
Per mostrare ora che n dispari è condizione sufficiente, occorre costruire un esempio di permutazioni che soddisfano la tesi. Anche qui ci sono almeno due modi:

(i) Siano $a_{2j-1} = j$ per $j = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}$ e $a_{2j} = \frac{n+1}{2} + j$ per $j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Notare che così abbiamo definito tutti i numeri $a_j \ldots, a_n$, che quelli con pedice dispari coprono tutti i valori da 1 a $\frac{n+1}{2}$ e quelli con pedice pari coprono tutti i numeri da $\frac{n+3}{2}$ a n. Quindi con questa costruzione $a_1, \ldots, a_n$ è una permutazione dei numeri da 1 a n.
In modo simile definiamo $b_{2j-1} = \frac{n-1}{2} + j$ per $j = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}$ e $b_{2j} = j$ per $j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Analogamente si verifica che $b_1, \ldots, b_n$ è una permutazione dei numeri da 1 a n.
per costruzione vale inoltre che $a_{2j-1} + b_{2j-1} = \frac{n-1}{2} + 2j$ per $j = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}$ e $a_{2j} + b_{2j} = \frac{n+1}{2} + 2j$ per $j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$. In particolare, si osserva che per ogni j vale $a_{2j} + b_{2j} = a_{2j-1} + b_{2j-1} + 1$ e $a_{2j+1} + b_{2j+1} = a_{2j} + b_{2j} + 1$ quindi le due permutazioni così costruite verificano la tesi.

(ii) Sia $a_i = 2i$ per $i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$ e $a_i = 2\left(i - \frac{n-1}{2}\right) - 1$ per $i = \frac{n+1}{2} \ldots, n$. Chiaramente così abbiamo definito tutti i numeri $a_1 \ldots, a_n$, con la prima metà che copre tutti i valori pari e la seconda tutti quelli dispari. Quindi con questa costruzione $a_1, \ldots, a_n$ è una permutazione dei numeri da 1 a n.
Definiamo invece $b_i = \frac{n+1}{2} - i$ per $i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$ e $b_i = \frac{n+1}{2} + n - i$ per $i = \frac{n+1}{2}, \ldots, n$. Chiaramente così abbiamo definito tutti i numeri

$b_1 \ldots, b_n$, con la prima metà che copre tutti i valori da 1 a $\frac{n-1}{2}$ e la seconda tutti quelli da $\frac{n+1}{2}$ a n, quindi $b_1, \ldots, b_n$ è una permutazione dei numeri da 1 a n.
Si verifica immediatamente che soddisfa la tesi, in quanto: $a_i + b_i = \frac{n+1}{2} + i$ per $i = 1 \ldots, \frac{n-1}{2}$ e $a_i + b_i = \frac{n+1}{2} + i$ per $i = \frac{n+1}{2} \ldots, n$.

Commento Per la prima parte del problema l'idea chiave è usare una qualche quantità "globale" che viene preservata dall'ordinamento: cosa è che non cambia permutando i numeri? Ci sono varie quantità che non variano: somma, prodotto, MCD, ecc. In questo caso era vincente considerare la somma (alcune soluzioni guardavano la media aritmetica dei numeri ma anch'essa è di fatto una somma). Anche l'idea successiva, ovvero "ho una quantità che so calcolare in due modi, quindi li posso porre uguali" ricorre in vari problemi, soprattutto di combinatoria. Spesso ci si riferisce con il nome di *double counting*. Potete trovare alcuni esercizi che usano questa idea nel Booklet degli Allenamenti EGMO del 2018, sezione 2.2.

Attenzione! Alcune soluzioni che ci sono arrivate si fermavano senza trovare un esempio. Ma la costruzione dell'esempio (e la verifica che funzioni) è metà del problema: si tratta di mostrare le due frecce dell'implicazione "n dispari" $\Leftrightarrow$ "n soddisfa la tesi". La prima parte della soluzione ci dice infatti solo che se n soddisfa la tesi, allora è necessariamente dispari. A questo punto, sebbene k possa assumere tutti i valori, ciò non implica necessariamente che esista una costruzione per ogni k: cosa ci dice che non ci siano altri motivi nascosti per cui si escludono alcuni valori? L'unico modo di accertarsi che tutti gli n funzionino era quindi costruire l'esempio.

In questo caso costruirlo non era semplice e c'erano almeno due approcci per trovarlo. O si provavano i casi piccoli ($n = 3$ non dava molte idee ma già dal caso $n = 5$ si potevano vedere dei pattern), oppure si provava a mettere da una parte degli a_i che aumentavano di 2 ogni volta e dell'altra dei b_i che diminuivano di 1, in modo che la somma aumentasse complessivamente di 1 ogni volta. Anche notare che l'identità con la somma usata per dire n dispari in realtà diceva anche quali erano i numeri che comparivano nelle somme poteva essere utile a cercare di scriverli. In generale c'era un po' da sporcarsi le mani.

Terzo Allenamento - Problemi

A3. Nella griglia in figura si vuole andare dalla casella di partenza P alla casella di arrivo A, seguendo due regole: ci si può spostare da una casella ad un'altra solo se hanno un lato in comune; si può passare al più una volta da ogni casella. In quanti modi può essere fatto il tragitto?

				A
P				

B3. Per ogni intero positivo n sia $f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. Quanto vale il massimo comune divisore dei numeri $f(1), f(2), \ldots, f(1000)$?

C3. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Si sa che il lato AB misura 6, l'angolo $\angle BAD$ misura $60°$ e l'angolo $\angle ADB$ è retto. Sia P il baricentro del triangolo ACD. Calcolare il valore del prodotto delle aree del triangolo ABP e del quadrilatero $ACPD$.

D3. Una pulce si muove saltando avanti e indietro lungo una retta. La tana della pulce è un punto della retta. Le regole di salto sono le seguenti:

- se la pulce si trova ad una distanza minore o uguale a 1 metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza doppia della precedente allontanandosi ancora di più dalla tana.
- se la pulce si trova ad una distanza d maggiore di 1 metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza $\frac{1}{d}$ dalla tana ma dalla parte opposta rispetto a quella dove si trova attualmente.

Se dopo 5 salti la pulce si trova a 80 cm dalla tana in una certa direzione, con quante sequenze distinte di salti può aver raggiunto quella posizione?

Terzo Allenamento - Soluzioni

A3. Nella griglia in figura si vuole andare dalla casella di partenza P alla casella di arrivo A, seguendo due regole: ci si può spostare da una casella ad un'altra solo se hanno un lato in comune; si può passare al più una volta da ogni casella. In quanti modi può essere fatto il tragitto?

				A
P				

A3. **Risposta:** 16 percorsi.
Chiamiamo orizzontali le mosse "←" e "→" e verticali le mosse "↑" e "↓". La prima osservazione da fare è che non si può mai usare "←". Abbiamo infatti due casi: o la mossa precedente è stata "→", e allora è chiaro che non si può fare " ← " o si tornerebbe sulla stessa casella, o la mossa precedente è stata "↑" e allora quella colonna è stata tutta visitata e non si può più attraversare, quindi se si va a sinistra non c'è poi modo di tornare a destra. Quindi le mosse orizzontali nel percorso saranno solo 4 mosse "→".
Per le mosse verticali osserviamo che non ce ne possono essere due consecutive: se sono diverse allora vuol dire che stiamo tornando sulla stessa casella, se sono uguali vuol dire che stiamo uscendo dalla griglia essendo questa alta due. Come corollario, usando che si può andare solo verso destra e mai verso sinistra, nel nostro percorso in ciascuna colonna si effettuerà al più una mossa in verticale. L'idea del conteggio è quindi: ci spostiamo a destra una colonna alla volta, e in ciascuna decidiamo se restare nella riga dove siamo oppure cambiarla, e passiamo poi alla colonna successiva. Quindi abbiamo 2 scelte per colonna, tranne nell'ultima in cui siamo obbligati a finire nella riga superiore. Essendoci 5 colonne, i percorsi possibili sono allora $2^{5-1} = 16$.

Commento: questo è un classico problema di conteggi. In questa tipologia di problemi, è cruciale trovare un modo di interpretare il problema che ci permetta di contare tutte le possibilità senza bisogno di elencarle. Spesso le riformulazioni hanno a che fare con la possibilità di fare una scelta tra certi oggetti a ogni step. In questo caso il modo più comodo per contare era "per ogni colonna posso scegliere se restare sulla mia riga o cambiarla". Per essere allenate a vedere le cose in modo comodo l'unica strada è fare tanti problemi. Pur essendo simili, bisogna infatti ricordare che problema ha la sua specifica idea chiave dietro. Inoltre spesso i conteggi sono la base per problemi più difficili di probabilità o combinatoria, quindi è importante saperli maneggiare!
Potete trovare alcuni esercizi classici nel Booklet degli Allenamenti EGMO 2018, sezione 2.1, oppure sulla pagina Il Senior in Pillole.

B3. Per ogni intero positivo n sia $f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. Quanto vale il massimo comune divisore dei numeri $f(1), f(2), \dots, f(1000)$?

B3. Risposta: 720

Notiamo intanto che $f(1) = 720$ quindi sicuramente la risposta è un divisore di 720.

Notiamo che, prendendo i numeri interi in ordine e k intero positivo, c'è un multiplo di k ogni k. Quindi presi 6 interi consecutivi, tra loro ci sono certamente: 1 multiplo di 5, 2 multipli di 3, 3 multipli di 2 tra cui 1 multiplo di 4. Quindi il prodotto di qualsiasi 6 interi consecutivi è divisibile per $5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 720$. Quindi $720|f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Commento L'idea della prima soluzione è un'idea utile da portarsi da casa. È infatti chiaro che l'idea si generalizza a qualsiasi k-upla di interi consecutivi: provate a dimostrare che, preso k intero positivo, il prodotto di k interi consecutivi è divisibile per $k!$.

Vi proponiamo inoltre un lemma correlato, che ha sempre a che fare con la divisibilità di consecutivi. La versione classica è coi fattoriali, ma si può generalizzare anche a k-uple di consecutivi.

Chiamiamo fattoriale di k il numero $k! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ (per definizione $0! = 1$).

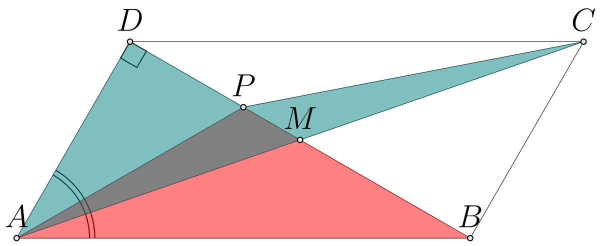
Chiamiamo valutazione $p-$adica di k, in simboli $v_p(k)$, il massimo esponente tale che la corrispondente potenza di p divida k, ovvero il numero naturale a tale che: $p^a|k$ ma $p^{a+1} \nmid k$.

Vale che $v_p(k!) = \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + \lfloor \frac{k}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{p^3} \rfloor + \dots$ (notare che la somma a un certo punto termina perché quando $p^a > k$ l'addendo diventa 0 e quindi ci sono solo finiti addendi positivi).

Speriamo vi possa essere utile per riflettere su quale è l'idea chiave da "portarsi a casa" da questo problema

C3. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Si sa che il lato AB misura 6, l'angolo $\angle BAD$ misura $60°$ e l'angolo $\angle ADB$ è retto. Sia P il baricentro del triangolo ACD. Calcolare il valore del prodotto delle aree del triangolo ABP e del quadrilatero $ACPD$.

C3. Nel disegno la doppia linea indica $60°$.



Poiché $\angle DAB = 60°$ e $\angle ADB = 90°$, il triangolo $\triangle ABD$ è metà di un triangolo equilatero di lato 6, perciò $AD = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ e $BD = 3\sqrt{3}$. Pertanto il triangolo $\triangle ABD$ ha area $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$.
Sia M l'intersezione delle diagonali BD e AC: il baricentro P di $\triangle ACD$ si trova sul segmento DM a una distanza tale che $DP = 2 \cdot PM$, inoltre per le proprietà del parallelogramma $DM = \frac{1}{2}DB$, perciò $DP = \frac{1}{3}DB$ e $PB = \frac{2}{3}DB$.
Poiché i triangoli $\triangle ABP$ e $\triangle ABD$ hanno la stessa altezza uscente da A, segue che $A_{ABP} = \frac{2}{3}A_{ABD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
Allo stesso modo, poiché $\triangle DPC$ e $\triangle DBC$ hanno la stessa altezza uscente da C, segue che $A_{DPC} = \frac{1}{3}A_{DBC} = \frac{1}{3}A_{ABD} = \frac{1}{3}\frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
Ora, l'area di $ACPD$ è uguale a $A_{ACD} - A_{DPC} = A_{ABD} - A_{DPC} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
Dunque la risposta è $A_{ABP} \cdot A_{ACPD} = 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 27$.

Commento: In tante avete considerato il quadrilatero $APCD$ al posto di $ACPD$, attenzione! In ogni caso avete trovato la risposta corretta perché i conti erano pressoché gli stessi. Il modo di non sbagliare era seguire esattamente i vertici nell'ordine in cui comparivano: A, C, P, D.

La strategia in questo tipo di problemi è cercare di descrivere tutte le aree che ci servono in relazione a una data area, ad esempio quella di $\triangle ABD$. In molte avete calcolato le aree di $\triangle APD$ o $\triangle ABP$ con più conti del necessario, introducendo vari nuovi punti, quando era sufficiente vederli sulla base BD e calcolare in che rapporto stanno le rispettive basi rispetto alla lunghezza di BD.

A questo proposito, come avete fatto in molte, era importantissimo ricordarsi che il baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due segmenti,

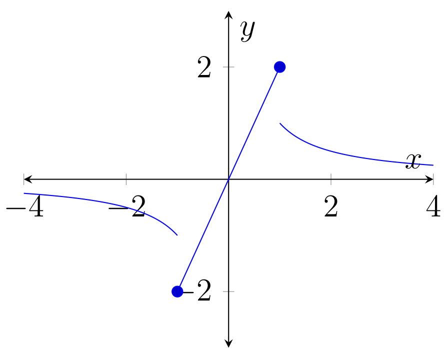
di cui quello che contiene il vertice è lungo il doppio dell'altro. Risulta molto utile in problemi in cui vengono richieste delle aree, perché ci fornisce una proporzione tra segmenti, e di conseguenza una proporzione tra le aree di triangoli che abbiano tali segmenti come basi, e stessa altezza, come nel nostro caso.
Un'ultima osservazione a questo proposito: una di voi ha usato il seguente utile fatto: le mediane di un triangolo lo dividono in sei triangolini tutti con la stessa area, uguale a un sesto di quella del triangolo. Poteva essere utile per calcolare A_{ACPD} più rapidamente.

D3. Una pulce si muove saltando avanti e indietro lungo una retta. La tana della pulce è un punto della retta. Le regole di salto sono le seguenti:

- se la pulce si trova ad una distanza minore o uguale a 1 metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza doppia della precedente allontanandosi ancora di più dalla tana.
- se la pulce si trova ad una distanza d maggiore di 1 metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza $\frac{1}{d}$ dalla tana ma dalla parte opposta rispetto a quella dove si trova attualmente.

Se dopo 5 salti la pulce si trova a 80 cm dalla tana in una certa direzione, con quante sequenze distinte di salti può aver raggiunto quella posizione?

D3. Soluzione 1: Sotto è rappresentato il grafico della funzione $f(x)$, che associa a ciascuna posizione x sulla retta reale la posizione in cui la pulce si trova dopo un salto compiuto a partire da x.



Prendiamo come unità di misura il metro. Detta x una generica posizione sulla retta reale possiamo notare che:

- se $|x| > 2$ la posizione x non può essere raggiunta da nessuna mossa
- se $2 \geq |x| \geq 1$ la posizione x può raggiunta in un unico modo da una mossa, partendo da $\frac{x}{2}$
- se $1 > |x|$ la posizione x può raggiunta in due modi da una mossa, partendo da $\frac{x}{2}$ oppure da $-\frac{1}{x}$.

Possiamo allora riprercorrere al contrario il percorso della pulce usando le osservazioni di sopra. Partiamo da $x_5 = \frac{4}{5}$ e arriviamo fino a x_0.

(i) $x_4 \in \left\{\frac{2}{5}, -\frac{5}{4}\right\}$ in quanto $1 > \frac{4}{5} > 0$

(ii) $x_3 \in \left\{\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{8}\right\}$ in quanto:

  · se $x_4 = \frac{2}{5}$, $1 > \frac{2}{5} > 0 \Rightarrow x_3 \in \left\{\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}\right\}$

  · se $x_4 = -\frac{5}{4}$, $2 \geq \frac{5}{4} \geq 1 \Rightarrow x_3 = -\frac{5}{8}$

(iii) $x_2 \in \left\{\frac{1}{10}, -5, -\frac{5}{16}, \frac{8}{5}\right\}$ in quanto:

  · se $x_3 = \frac{1}{5}$, $1 > \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow x_2 \in \left\{\frac{1}{10}, -5\right\}$

- $x_3 = -\frac{5}{2}$ non può essere raggiunto perché < -2
- se $x_3 = -\frac{5}{8}$, $1 > \frac{5}{8} > 0 \Rightarrow x_2 \in \left\{-\frac{5}{16}, \frac{8}{5}\right\}$

(iv) $x_1 \in \left\{\frac{1}{20}, -10, -\frac{5}{32}, \frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ in quanto:

- se $x_2 = \frac{1}{10}$, $1 > \frac{1}{10} > 0 \Rightarrow x_1 \in \left\{\frac{1}{20}, -10\right\}$
- $x_2 = -5$ non può essere raggiunto perché < -2
- se $x_2 = -\frac{5}{16}$, $1 > \frac{5}{16} > 0 \Rightarrow x_1 \in \left\{-\frac{5}{32}, \frac{16}{5}\right\}$
- se $x_2 = \frac{8}{5}$, $2 \geq \frac{8}{5} \geq 1 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{5}$

(v) $x_0 \in \left\{\frac{1}{40}, -20, -\frac{5}{64}, \frac{32}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{4}\right\}$ in quanto:

- se $x_1 = \frac{1}{20}$, $1 > \frac{1}{20} > 0 \Rightarrow x_0 \in \left\{\frac{1}{40}, -20\right\}$
- $x_1 = -10$ non può essere raggiunto perché < -2
- se $x_1 = -\frac{5}{32}$, $1 > \frac{5}{32} > 0 \Rightarrow x_2 \in \left\{-\frac{5}{64}, \frac{32}{5}\right\}$
- $x_1 = \frac{16}{5}$ non può essere raggiunto perché > 2
- se $x_1 = \frac{4}{5}$ per lo step (i) $x_0 \in \left\{\frac{2}{5}, -\frac{5}{4}\right\}$

Quindi i possibili punti di partenza sono 6.

Soluzione 2 Definiamo gli insiemi:

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad B = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$C = [-2, -1] \cup [1, 2] \quad D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Notiamo che partendo da A con una mossa si può finire in A oppure B, partendo da B solo in C, partendo da C solo in B e partendo da D solo in A.
Fissiamo adesso $x \neq 1, \frac{1}{2}$ una posizione sulla retta reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano a_n, b_n, c_n, d_n, il numero di percorsi fatti da n passi che arrivano in x partendo da una posizione x_0 che soddisfa, rispettivamente, $x_0 \in A, B, C, D$. Chiaramente per $n = 0$ a_0, b_0, c_0, d_0 assumono i valori $0, 1$ a seconda del valore di x.
Traducendo quanto notato sul procedere a ritroso in A, B, C, D si ha $\forall n \geq 1$:

- $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$
- $b_n = c_{n-1}$
- $c_n = b_{n-1}$
- $d_n = a_{n-1}$

Se $x = \frac{4}{5}$ si ha:

- $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0, d_0 = 0$
- $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1, d_1 = 0$
- $a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 0, d_2 = 1$

- $a_3 = 2, b_3 = 0, c_3 = 1, d_3 = 1$
- $a_4 = 2, b_4 = 1, c_4 = 0, d_4 = 2$
- $a_5 = 3, b_5 = 0, c_5 = 1, d_5 = 2$

Quindi in totale abbiamo $a_5 + b_5 + c_5 + d_5 = 6$ percorsi.

Commento Questo era un problema per allenare la capacità di non perdersi quando ci sono molti conti da fare. Ciò che è stato implicitamente fatto nella prima soluzione è infatti costruire l'albero con tutte le possibilità, in cui da ogni nodo si disegnano gli archi verso le possibili posizioni precedenti (che sono sempre 0,1,2). In tal senso, l'albero poteva arrivare ad avere fino a $2^5 = 32$ nodi, ma le osservazioni fatte all'inizio consentivano di mantenere sempre un numero di casi ridotto e quindi gestibile.
È inoltre interessante la seconda soluzione (ispirata da una che ci avete mandato voi!), in cui si cerca di trovare una formulazione che risolva qualcosa di più del caso particolare: in questo caso generalizzare il problema consentiva di ottenere una soluzione meno contosa, usando delle successioni definite per ricorrenza.