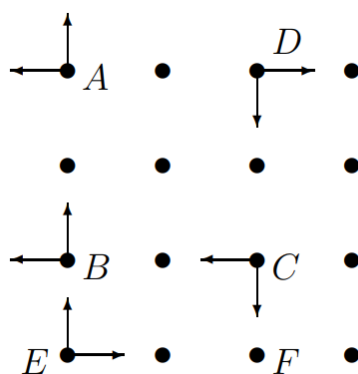


Aspettando Cese - Combinatoria

Sesto allenamento - Problemi

- A1.** Un servizio di streaming musicale propone canzoni classificate in 10 generi musicali, in modo che ogni brano appartenga ad uno e un solo genere. Le canzoni vengono suonate una dopo l'altra: le prime 17 sono scelte dall'utente, ma a partire dalla diciottesima il servizio determina automaticamente quale canzone suonare. Elisabetta ha notato che, se si fa la classifica di quali generi compaiano più volte nel corso degli ultimi 17 brani suonati, la nuova canzone appartiene sempre al genere in testa alla classifica o, in caso di pari merito, a uno dei primi ex-aequo. Dimostrare che, comunque siano scelti i primi 17 brani, da un certo punto in poi le canzoni proposte sono tutte dello stesso genere.
- B1.** Sia n un intero maggiore o uguale a 2. Ci sono n persone in fila indiana, ognuna delle quali è o un furfante (e mente sempre) oppure un cavaliere (e dice sempre la verità). Ogni persona, eccetto la prima, indica una delle persone davanti a lei e dichiara "Questa persona è un furfante" oppure "Questa persona è un cavaliere". Sapendo che ci sono strettamente più furfanti che cavalieri, dimostrare che assistendo alle dichiarazioni è possibile determinare per ognuna delle persone se si tratta di un furfante o di un cavaliere.
- C1.** Ogni numero intero viene colorato con uno di due colori, rosso o blu. Sappiamo che, per ogni insieme finito A di interi consecutivi, il valore assoluto della differenza tra il numero degli interi rossi e il numero degli interi blu nell'insieme A è al più 1000. Dimostrare che esiste un insieme di 2000 interi consecutivi fra i quali ci sono esattamente 1000 numeri rossi e 1000 numeri blu.
- D1.** Una griglia è costituita da $n \times n$ punti, con n intero positivo. In alcuni di questi punti è disposta una sentinella. Ogni sentinella sceglie due direzioni tra di loro perpendicolari (tra quelle delle righe e delle colonne della griglia) e sorveglia tutti i punti che si trovano nelle direzioni prescelte. Ogni sentinella sorveglia anche la casella che occupa, e le sentinelle che si trovano al bordo possono anche ritrovarsi a guardare verso il vuoto, a seconda delle direzioni scelte. Ad esempio, nella figura sottostante, relativa ad una disposizione di 5 sentinelle in una griglia 4×4 , le sentinelle in A, B, C, D, E sorvegliano, rispettivamente, 1, 3, 4, 5, 7 punti; i punti D ed E sono sorvegliati da una sola sentinella, il punto C è sorvegliato da 2 sentinelle, i punti A, B ed F sono sorvegliati da 3 sentinelle.



- (a) Dimostrare che possiamo posizionare 12 sentinelle in una griglia 4×4 in modo che ogni punto della griglia sia sorvegliato da al più 2 sentinelle.
- (b) Sia $S(n)$ il massimo numero di sentinelle che possiamo disporre in una griglia $n \times n$ in modo tale che ogni punto della griglia sia sorvegliato da al più 2 sentinelle. Dimostrare che $3n \leq S(n) \leq 4n$ per ogni $n \geq 3$.