

# OliMaTO 11

## Simulazione Gara Nazionale a Squadre 2025

- Per ogni problema indicare come risposta un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- I problemi ritenuti più impegnativi dagli autori sono contrassegnati da una o due stelle ([★] o [★★]).
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati che possono risultare utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \quad \sqrt{3} \approx 1,7321 \quad \sqrt{5} \approx 2,2361 \quad \sqrt{7} \approx 2,6458 \quad \pi \approx 3,1416.$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

**Testi a cura di:** Lorenzo Capponi, Jiakai Hu, Tommaso Pignatelli, Antonio Polignano, Matteo Riccadonna.

**Ambientazione a cura di:** Lorenzo Capponi.

## 1. Intro: storia di famiglia

“Tanto tempo fa c’era una famiglia, in cui il papà era un musicista. Amavano ballare e cantare tutti insieme, ma egli aveva un sogno: suonare in tutto il mondo. Così, un giorno partì con la sua chitarra e non tornò più. Sua moglie IMolda, per mantenere la figlia Coco, imparò a fabbricare scarpe, per poi tramandare quest’arte a tutti i suoi discendenti nelle successive generazioni. In particolare, nell’ $n$ -esima generazione impararono il mestiere esattamente  $a_n$  calzolai, in modo da definire una successione  $a_1, a_2, a_3, \dots$  di interi positivi strettamente crescente tale che ogni termine  $a_{3k-2}$  sia divisibile per 8 e ogni termine  $a_{3k}$  sia divisibile per 9, per ogni intero positivo  $k$ ”. Quale può essere, al massimo, l’intero positivo  $m$  tale che  $a_m \geq 2025$  e  $a_{m-1} < 2025$ ?

**Soluzione:** la risposta è 590.

Definiamo ogni termine della successione in modo che sia il minimo possibile, compatibilmente con le ipotesi. Dunque i primi termini saranno  $a_1 = 8$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_3 = 18$ ,  $a_4 = 24$ ,  $a_5 = 25$ ,  $a_6 = 27$ , e così via. Osserviamo che vale  $a_{3k+3} - a_{3k} = 9$  per ogni  $k$  intero che non è multiplo di 7, mentre se  $k$  è multiplo di 7 allora  $a_{3k+3} - a_{3k} = 18$ . Ricaviamo allora  $a_{21k} = 72k$  per ogni  $k$ , da cui  $a_{21 \cdot 28} = a_{588} = 2016$ , e infine  $a_{589} = 2024$  e  $a_{590} = 2025$ .

## 2. Niente musica!

Abel-ita, figlia di Mamá Coco, adotta le stesse regole di casa di IMolda: ogni forma di musica è bandita, al punto che ha addirittura deciso di impedire ai musicanti di avvicinarsi all’abitazione. Il perimetro di Casa Rivera è un triangolo di lati 26 m, 28 m e 30 m. Abel-ita ha vietato la produzione di musica in tutti i punti che si trovano a una distanza pari o inferiore a  $d$  da qualche punto del perimetro della casa; in particolare, il valore  $d$  è stato scelto in modo che la musica non fosse permessa in alcun punto interno alla casa. Quanti metri quadrati misura, al minimo, l’area in cui la musica è bandita (sia interna che esterna a Casa Rivera)?

**Soluzione:** la risposta è 1209.

Il minimo  $d$  possibile è la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta nel triangolo. L’area del triangolo, che è 336, si può calcolare con la formula di Erone; il raggio  $r$  della circonferenza inscritta è il rapporto tra area e semiperimetro, ovvero  $r = 8$ .

L’area interessata esterna al triangolo si può suddividere in sei regioni, di cui:

- tre rettangoli le cui basi sono i lati del triangolo e di altezza  $r$ ;
- tre settori circolari di raggio  $r$ , con i rispettivi centri nei vertici del triangolo.

Le aree dei rettangoli si calcolano facilmente, dato che le dimensioni sono note:

$$26r + 28r + 30r = 8 \cdot (26 + 28 + 30) = 672.$$

Infine, notiamo che l’unione dei tre settori circolari è un cerchio intero, di area  $r^2\pi = 64\pi \approx 201,0624$ . L’area cercata è

$$336 + 672 + 201,0624 = 1209,0624.$$

## 3. Problemi di memoria

Ormai molto anziana, Mamá Coco soffre di perdite di memoria: confonde i nomi dei suoi parenti e si è persino dimenticata la sua 10-upla ordinata di numeri preferita  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ . Si ricorda soltanto che ogni numero è un intero compreso tra 0 e 200, estremi inclusi, e che per ogni quaterna  $\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\}$  per  $k = 1, 2, \dots, 7$  la media aritmetica è minore o uguale a 95. Quanto può valere, al massimo, la somma dei 10 numeri della 10-upla preferita di Mamá Coco?

**Soluzione:** la risposta è 1140.

Verifichiamo che la somma non può essere maggiore di 1140:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \leq \sum_{i=1}^{10} x_i + x_4 + x_7 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + (x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) \leq 12 \cdot 95 = 1140.$$

Esibiamo una 10-upla ottimale:

$$(190, 190, 0, 0, 190, 190, 0, 0, 190, 190).$$

#### 4. Segreto inconfessabile

Il piccolo Miquel ha una grande passione per la chitarra, che purtroppo è in contrasto con la profonda avversione che la sua famiglia ha nei confronti della musica: “Lo so che non dovrei amare la musica, ma non è colpa mia! È colpa del mio idolo, Ternesto de la Cruz, il più grande musicista di sempre! Quando suonava, tutti rimanevano incantati. Aveva una chitarra epica, ha scritto le canzoni più belle, recitava nei film, sapeva volare, e sapeva anche calcolare quante sono le coppie ordinate  $(a, b)$  di interi positivi tali che  $\text{mcm}(a, b) = 1003003001$ ”.

**Soluzione:** la risposta è 343.

Prima di tutto notiamo che  $1003003001 = 1001^3 = 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3$ . Siano  $a_3$  e  $b_3$  i rispettivi esponenti di 7 nelle fattorizzazioni in primi di  $a$  e  $b$ : deve valere  $\max(a_3, b_3) = 3$ . Le coppie  $(a_3, b_3)$  possibili sono

$$(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (3, 0).$$

Considerazioni analoghe valgono per gli esponenti di 11 e 13. Dunque la risposta è  $7^3 = 343$ .

#### 5. Gara di musica

In occasione del *Día de los muertos*, a Santa Cecilia è stata organizzata una gara musicale. Si prevede la partecipazione di 10 concorrenti, che saranno numerati da 1 a 10 in base all'ordine di iscrizione. Dopodiché il torneo si svolgerà in questo modo:

- il concorrente numero 10 sfiderà il numero 9 in un duello musicale, il cui perdente sarà il decimo classificato nel torneo;
- il vincitore del primo duello sfiderà il concorrente numero 8, e il perdente sarà il nono classificato;
- il vincitore del secondo duello sfiderà il concorrente numero 7, e il perdente sarà l'ottavo classificato;
- ...

e così via fino al nono e ultimo duello, in cui il vincitore del duello precedente gareggerà contro il concorrente numero 1; al termine di questa sfida, saranno decretati il primo e il secondo classificato. Una volta stabilita la numerazione iniziale dei concorrenti, quante sono le diverse classifiche possibili?

**Soluzione:** la risposta è 512.

L'insieme dei 9 perdenti si può determinare in  $2^9 = 512$  modi diversi, in base agli esiti dei duelli. Chiaramente, ogni insieme di 9 perdenti determina univocamente una classifica, quindi la risposta è proprio 512.

#### 6. Volantino piegato

Miquel vorrebbe partecipare alla gara di musica durante le celebrazioni del *Día de los muertos*, quindi ruba di nascosto un volantino a forma di triangolo equilatero di area 2025. Per poterlo infilare in tasca, deve prima piegarlo: effettua dunque una piega rispetto a una retta parallela a uno dei lati, in modo da massimizzare l'area in cui la parte superiore del foglio si sovrappone a quella inferiore. Quanto misura quest'area?

**Soluzione:** la risposta è 675.

Siano  $A, B, C$  i vertici del triangolo e  $D, E$  gli estremi del segmento che rappresenta la piega, in modo che  $DE$  sia parallelo a  $BC$  (con  $D \in AB$  e  $E \in AC$ ). Siano inoltre  $s$  il lato di  $ABC$  e  $\ell$  la lunghezza di  $DE$ .

Se  $\ell \leq s/2$  allora la sovrapposizione tra le due parti del foglio è un triangolo equilatero di lato  $\ell$ , la cui area può essere al massimo  $1/4$  di quella del triangolo iniziale.

Se  $\ell > s/2$  allora la sovrapposizione è un trapezio isoscele di base maggiore  $DE$  e base minore  $FG$  (con  $B, F, G, C$  allineati in quest'ordine). Posto  $X = EF \cap DG$ , esprimiamo l'area di  $DEFG$  come la differenza tra l'area di  $DEX$  e l'area di  $FGX$ . L'area di  $DEX$  è uguale all'area di  $ADE$ , ossia  $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$ . Per calcolare l'area di  $FGX$  ricaviamo la misura di  $FG$ :

$$\begin{aligned} FG &= BC - BG - FC \\ &= BC - BD - CE \\ &= BC - (AB - AD) - (AC - AE) \\ &= 2\ell - s. \end{aligned}$$

Allora l'area di  $FGX$  è  $\frac{(2\ell-s)^2\sqrt{3}}{4}$ . Dunque l'area di  $DEFG$  è

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\ell-s)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(-3\ell^2 + 4s\ell - s^2).$$

Il massimo della parabola  $f(\ell) = -3\ell^2 + 4s\ell - s^2$  si ha per  $\ell = \frac{2s}{3}$ , e sostituendo si ottiene

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{s^2}{3}.$$

Notiamo che questa quantità è  $1/3$  dell'area di  $ABC$ , quindi la risposta è  $2025/3 = 675$ .

## 7. L'ofrenda

“Vedi Miquel, il *Día de los muertos* è l'unica notte dell'anno in cui i nostri antenati possono venire a farci visita” spiega Abel-ita, “Dobbiamo onorare la loro memoria allestendo l'*ofrenda*: mettiamo in fila le loro 7 foto. Miquel, in quanti modi diversi potremmo disporle sull'altare?”. Miquel, per suonare la chitarra, ha tralasciato lo studio del calcolo combinatorio e non sa rispondere. “Te lo dico io!” tuona Abel-ita, “Ci sono 5040 modi diversi! Ora, per punizione, devi elencarli su un foglio: associa a ogni possibile permutazione un numero che si scrive con le cifre da 1 a 7 una volta ciascuna, e scrivi tutti questi numeri in ordine crescente!”. Quali sono le ultime quattro cifre del 2025-esimo numero che scriverà Miquel?

**Soluzione:** la risposta è 2415.

I primi  $6! = 720$  numeri iniziano per 1 e i successivi 720 iniziano per 2, quindi il 2025-esimo inizierà per 3. Dopo i primi 1440 numeri, i primi  $5! = 120$  iniziano per 2 e così via; troviamo che la seconda cifra del numero cercato è 6. Si continua a ragionare nello stesso modo fino alla fine, ricavando una cifra dopo l'altra. Il 2025-esimo numero è 3672415.

## 8. Oggetto proibito

Miquel ha segretamente speso i suoi risparmi per acquistare una chitarra. Il prezzo fissato inizialmente era una quantità razionale  $x$  di pesos, ma il commerciante ha concesso uno sconto e ha chiesto soltanto la parte intera di  $x$ : in questo modo, il nuovo prezzo è risultato pari a  $\frac{2024}{2025}$  di quello originale. Sapendo che  $x$  è il più grande numero razionale che verifica questa condizione, qual è stata la differenza tra il prezzo originale e il prezzo effettivo? *Dare come risposta la somma numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

**Soluzione:** la risposta è 4047.

Siano  $\lfloor x \rfloor$  la parte intera di  $x$  e  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  la parte frazionaria di  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor + \{x\}} &= \frac{2024}{2025} \\ 2025\lfloor x \rfloor &= 2024\lfloor x \rfloor + 2024\{x\} \\ \lfloor x \rfloor &= 2024\{x\}. \end{aligned}$$

Affinché  $2024\{x\}$  sia intero,  $\{x\}$  deve esprimibile come frazione ridotta ai minimi termini  $\frac{a}{b}$  con  $b$  che divide 2024. Per massimizzare tale quantità poniamo  $b = 2024$  e  $a = 2023$ , ricavando  $\{x\} = \frac{2023}{2024}$ .

## 9. L'eredità di Ternesto

Abel-ita ha scoperto il covo segreto in cui Miquel custodiva la sua chitarra e gliel'ha distrutta. Il ragazzino, testardo, decide allora di recarsi al mausoleo di Ternesto de la Cruz per impossessarsi della vecchia chitarra del musicista, convinto tra l'altro di essere un suo pronipote. Il fondo della cassa armonica di questo strumento è stato intagliato a partire da un pannello di legno a forma di triangolo  $ABC$  rettangolo in  $C$ , con cateto maggiore  $AC$  lungo 60 cm. Detto  $M$  il punto medio di  $AB$ , è stata individuata l'intersezione  $D$  tra il segmento  $AC$  e la circonferenza circoscritta al triangolo  $BCM$ , ricavando il quadrilatero  $BCDM$ . Sapendo che  $DM = 20$  cm, qual è l'area di tale quadrilatero in centimetri quadrati?

**Soluzione:** la risposta è 692.

La ciclicità di  $BCDM$  implica che  $\widehat{BMD}$  è retto. Allora  $AMD$  è rettangolo e simile ad  $ABC$ .

Posto  $AM = MB = x$ , impostiamo un'equazione esprimendo  $BC$  in due modi diversi. Il primo modo è  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4x^2 - 3600}$ . Il secondo modo è

$$\begin{aligned} MD : AM &= BC : AC \\ 20 : x &= BC : 60 \\ BC &= \frac{1200}{x}. \end{aligned}$$

L'unica soluzione reale dell'equazione

$$\sqrt{4x^2 - 3600} = \frac{1200}{x}$$

è  $x = 20\sqrt{3}$ . Per concludere, dopo aver ricavato  $BC = 20\sqrt{3}$ , calcoliamo l'area di  $BCDM$  come differenza tra l'area di  $ABC$  e l'area di  $AMD$ :

$$\frac{20\sqrt{3} \cdot 60}{2} - \frac{20 \cdot 20\sqrt{3}}{2} = 400\sqrt{3} \approx 692,84.$$

## 10. Fiori di ta(n)ge(n)te

Nella cultura messicana, per la commemorazione dei defunti le *ofrende* vengono tradizionalmente decorate con fiori di *ta(n)ge(n)te*. In preparazione al *Día de los muertos*, la famiglia Rivera ha acquistato un fusto di questa pianta su cui si sono sviluppate tre gemme. Ogni giorno, ciascuna delle gemme che non è ancora sbocciata ha probabilità  $1/3$  di sbocciare in un fiore, indipendentemente dalle altre. Qual è la probabilità che i tre fiori di *ta(n)ge(n)te* sboccino in tre giorni diversi? *Dare come risposta la somma numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

**Soluzione:** la risposta è 143.

Distinguiamo due fasi: quella in cui nessun fiore è ancora sbocciato e quella in cui esattamente un fiore è già sbocciato. Partendo da un giorno qualunque nella prima fase c'è una probabilità di  $\frac{8}{27}$  che nel giorno dopo si resti ancora nella prima fase e una probabilità di  $\frac{4}{9}$  di passare alla seconda fase. Detta  $p$  la probabilità di passare prima o poi alla seconda fase, senza che due o più gemme sboccino contemporaneamente, vale

$$p = \frac{8}{27}p + \frac{4}{9},$$

da cui  $p = \frac{12}{19}$ . Ragioniamo in modo analogo per calcolare la probabilità che, una volta entrati nella fase 2, le ultime due gemme non sboccino contemporaneamente: questa probabilità è  $\frac{4}{5}$ .

In definitiva, la probabilità cercata è  $\frac{12}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{95}$  e la risposta è  $48 + 95 = 143$ .

## 11. Il mondo dei defunti

Miquel, maledetto per aver sottratto la chitarra alla tomba di Ternesto, si ritrova catapultato nel mondo dei defunti e, dopo aver incontrato gli spiriti dei suoi parenti, scopre che durante il *Día de los muertos* si apre un passaggio tra il mondo dei defunti e quello dei vivi; tuttavia, non tutti gli spiriti possono attraversarlo. Si presentano presso il varco 2025 spiriti numerati da 1 a 2025: tra questi, possono attraversarlo soltanto gli spiriti il cui numero  $n$  ha tutte le cifre pari ed è tale che anche  $2n$  abbia tutte le cifre pari. Quanti spiriti possono attraversare il ponte e raggiungere il mondo dei vivi?

**Soluzione:** la risposta è 32.

Chiamiamo “validi” gli interi positivi con la proprietà richiesta. I numeri validi sono tutti e soli quelli le cui cifre appartengono all'insieme  $\{0, 2, 4\}$ . Chiaramente questi numeri sono validi; verifichiamo che non ne esistono altri.

Supponiamo che  $n$  possieda una cifra  $d$  che è uguale a 6 o 8. Scriviamo  $n$  come

$$n = 10^{a+1}n_1 + 10^a d + n_2,$$

dove  $n_1$  e  $n_2$  hanno tutte le cifre pari; allora

$$2n = 10^{a+1}(2n_1 + 1) + 10^a(2d - 10) + 2n_2.$$

L'ultima cifra di  $2n_1 + 1$ , che corrisponde alla  $(a+2)$ -esima cifra di  $2n$  a partire da destra, è dispari, quindi  $2n$  non è valido.

Si trova facilmente che gli interi positivi validi minori di 2025 sono 32.

## 12. Una benedizione sgradita

Per non restare intrappolato nel mondo dei defunti, Miquel deve ricevere la benedizione da parte dello spirito di un parente entro l'alba. La sua trisavola IMolda si offre di benedirlo, ma alla condizione che abbandoni per sempre la musica. Il ragazzino rifiuta il patto e se la dà a gambe, deciso a trovare lo spirito del suo presunto trisavolo, Ternesto de la Cruz. Miquel fugge tra i vicoli del mondo dei defunti, che formano un reticolo di strade parallele agli assi di un piano cartesiano. Partendo dall'origine, con ogni spostamento Miquel può spostarsi da un generico punto  $(x, y)$  al punto  $(x + 1, y)$ ,  $(x - 1, y)$  oppure  $(x, y + 1)$ , ma per non essere catturato non può passare più di una volta per uno stesso punto. Quanti sono i diversi percorsi possibili costituiti da una sequenza di 8 spostamenti?

**Soluzione:** la risposta è 1393.

Classifichiamo i percorsi in base alla loro lunghezza e in base alla direzione dell'ultimo spostamento. Per ogni  $n$ , siano  $N(n)$ ,  $E(n)$  e  $O(n)$  rispettivamente le quantità di percorsi costituiti da  $n$  spostamenti di cui l'ultimo spostamento è diretto verso nord, est e ovest.

Per simmetria, vale  $E(n) = O(n)$  per ogni  $n$ . Inoltre:

- $E(n) = E(n-1) + N(n-1)$ , infatti ogni spostamento verso est deve essere preceduto da uno verso nord o verso ovest;
- $N(n) = N(n-1) + E(n-1) + O(n-1) = N(n-1) + 2E(n-1)$ , infatti ogni spostamento verso nord può essere preceduto da uno spostamento in una direzione qualsiasi.

Con queste osservazioni è facile calcolare ricorsivamente

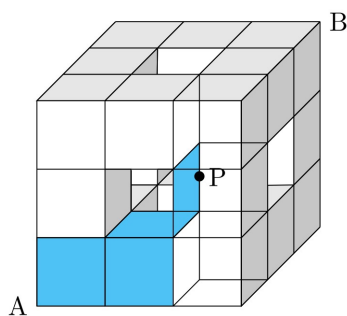
$$N(8) + E(8) + O(8) = N(8) + 2E(8) = 1393.$$

## 13. Lo spettacolo di Frida Kahlcolo

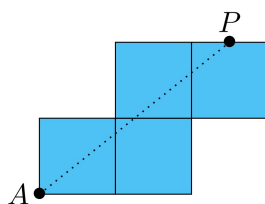
Nella sua ricerca di Ternesto de la Cruz, Miquel si imbatte in nientemeno che lo spirito della celeberrima pittrice Frida Kahlcolo, che nel mondo dei defunti si è data al teatro e sta preparando uno spettacolo: “Buio! E dall'oscurità... una papaya gigante formata da 27 cubi di spigolo 10 metri assemblati a formare un enorme cubo di spigolo 30 metri, di cui  $A$  e  $B$  sono vertici opposti. I ballerini rimuovono 7 dei 27 cubi: quello centrale e i sei ad esso adiacenti. Infine, la mia controfigura parte dal punto  $A$  e, arrampicandosi sulla superficie di ciò che rimane della papaya, raggiunge il punto  $B$ ”. Detta  $\ell$  la lunghezza in metri minima possibile del percorso della controfigura di Frida Kahlcolo, quanto vale  $\ell^2$ ?

**Soluzione:** la risposta è 4100.

Il percorso più breve in linea d'aria sarebbe il segmento  $AB$ , quindi l'idea è di cercare di “restare vicini” il più possibile a tale diagonale, passando all'interno del solido. L'osservazione fondamentale è che il percorso più breve possibile passa per il punto  $P$  evidenziato nella figura seguente (si tratta del punto medio del segmento a cui appartiene).



In questo modo, per simmetria risulta che il percorso da  $A$  a  $P$  è lungo quanto il percorso da  $P$  a  $B$ . Per calcolare la lunghezza del percorso da  $A$  a  $B$ , consideriamo lo sviluppo piano delle quattro facce evidenziate in blu.



Con il teorema di Pitagora si ricava che  $AP = 5\sqrt{41}$ . Pertanto, il percorso complessivo è lungo  $10\sqrt{41}$  metri e la risposta è 4100.

## 14. Il Mondo Es Mi Familia

Nel palazzo di Ternesto de la Cruz si sta svolgendo una grande festa. Diversi invitati si divertono a giocare a backgammon, utilizzando il dado noto come “cubo del raddoppio”: sulle sue sei facce compaiono i numeri 2, 4, 8, 16, 32 e 64 rispettivamente. Dopo aver tirato il dado quattro volte, i risultati usciti sono in ordine  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . Miquel nota che, curiosamente, la quantità  $\frac{a+b}{c+d}$  è uguale alla media aritmetica tra  $\frac{a}{c}$  e  $\frac{b}{d}$ : qual era la probabilità che ciò accadesse? Dare come risposta la somma numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

**Soluzione:** la risposta è 811.

La media tra  $a/c$  e  $b/d$  è  $\frac{ad+bc}{2cd}$ , quindi l'equazione da risolvere è

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c+d} &= \frac{ad+bc}{2cd} \\ 2(a+b)cd &= (ad+bc)(c+d) \\ ad^2 - acd - bcd + bc^2 &= 0 \\ (ad-bc)(d-c) &= 0.\end{aligned}$$

L'uguaglianza è verificata se e solo se  $ad = bc$  o  $c = d$ .

- La probabilità che  $c = d$  è  $\frac{1}{6}$ .
- La probabilità che  $ad = bc$  si può calcolare come

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}{36^2} = \frac{73}{648},$$

dove ogni addendo del numeratore rappresenta il caso di uno dei possibili 11 valori di  $ad$  (da  $2^2$  a  $2^{12}$ ).

- La probabilità di avere contemporaneamente  $ad = bc$  e  $c = d$  coincide con la probabilità che  $a = b$  e  $c = d$  allo stesso tempo, che è  $\frac{1}{36}$ .

La probabilità cercata è

$$\frac{73}{648} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{163}{648}.$$

## 15. La verità è svelata

Ternesto è in procinto di benedire Miquel, quando interviene Véctor, pregando il ragazzino di esibire la sua foto nel mondo dei vivi. “Véctor, vecchio amico mio”, dice Ternesto, “Ti stanno dimenticando...”. “E di chi è la colpa?” ribatte Véctor, infuriato, “Ti sei impossessato delle mie canzoni, prendendoti tutti i meriti! Il brano *Ricorda M*, che ti ha portato alla fama, l'ho composto io! Su una riga del pentagramma ho inizialmente scritto 1000 note, rappresentate da altrettanti punti distinti  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{1000}$  allineati ed equidistanziati (ovvero  $P_k P_{k+1} = P_{k+1} P_{k+2}$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, 998$ ). Dopodiché, per ogni  $i = 2, 3, \dots, 1000$  a partire da  $i = 2$  e proseguendo in ordine crescente, ho eseguito la seguente procedura: ho verificato se almeno uno dei punti medi dei segmenti  $P_1 P_i, P_2 P_i, \dots, P_{i-1} P_i$  risultasse ancora presente e, in caso affermativo, ho cancellato il punto  $P_i$ . Alla fine della procedura, sono rimasti solo alcuni dei 1000 punti iniziali: per esempio, i primi che ho cancellato sono stati in ordine  $P_3$  (in quanto  $P_2$  era il punto medio di  $P_1 P_3$ ),  $P_6$  (in quanto  $P_5$  era il punto medio di  $P_4 P_6$ ) e  $P_7$  (in quanto  $P_4$  era il punto medio di  $P_1 P_7$ ). Invece, per esempio non ho cancellato  $P_4$  anche se  $P_3$  era il punto medio di  $P_2 P_4$ , poiché nel momento in cui ho considerato  $P_4$  il punto  $P_3$  era già stato cancellato”. Quanti punti ha cancellato Véctor in tutto?

**Soluzione:** la risposta è 895.

Numeriamo i 1000 punti da 0 a 999 invece che da 1 a 1000, e dimostriamo che i punti cancellati sono quelli il cui numero associato, scritto in base 3, contiene almeno una cifra 2.

Procediamo per induzione. Il punto 0 ovviamente non viene cancellato. Ora supponiamo di aver considerato tutti i punti fino a  $(k-1)$ -esimo cancellando quelli che in base 3 hanno almeno una cifra 2. Per determinare se il punto  $k$  debba essere cancellato o meno, occorre controllare se esiste un punto (non cancellato)  $A < B$  con  $2B = A + k$  per qualche  $B$ .

- Se  $k$  ha almeno un 2 in base 3, definiamo  $A$  come il numero che in base 3 ha cifre 1 in corrispondenza delle cifre 1 di  $k$ , e 0 come ogni altra cifra. Allora  $A < k$  e  $k + A$  non ha cifre 1. Pertanto  $(k + A)/2$  è un numero intero senza cifre 2 e corrisponde a un punto non cancellato.

- Se  $k$  non ha cifre 2, supponiamo per assurdo che esistano punti non cancellati  $A$  e  $B$  con  $A < B$  e  $2B = A + k$ . Per induzione,  $B$  non ha cifre 2, quindi  $2B$  non ha cifre 1. Sommando  $A$  e  $k$  non possono esserci riporti, quindi l'unico modo affinché  $A + k$  non abbia cifre 1 è che  $A$  e  $k$  abbiano cifre 1 nelle stesse posizioni, il che implicherebbe  $A = k$ , assurdo.

Alla luce di queste osservazioni, si calcola facilmente che i punti cancellati sono 895.

## 16. Nel cenote [★★]

Per non rischiare che la sua reputazione venga infangata, Ternesto decide di sbarazzarsi di Miquel e Vécior, ordinando ai suoi scagnozzi di gettarli in un *cenote*, una delle tipiche grotte carsiche messicane. La camera principale del *cenote* ha pianta quadrata, con le superfici delle pareti riflettenti. Da una fessura in corrispondenza di uno dei vertici del pavimento, filtra un raggio di luce parallelo al pavimento stesso, che viene riflesso sulle pareti un certo numero di volte prima di finire in uno dei vertici del pavimento, diverso da quello di partenza. Guardando dall'alto, la traiettoria del raggio è una spezzata che divide il pavimento del *cenote* in esattamente 2021 regioni diverse. Quante volte può essere stato riflesso il raggio, al minimo?

**Soluzione:** la risposta è 129.

Immaginando di osservare il pavimento quadrato dall'alto, abbiamo due lati orizzontali e due verticali. L'osservazione fondamentale è che se avvengono  $a$  rimbalzi su lati verticali e  $b$  rimbalzi su lati orizzontali, allora  $a + 1$  e  $b + 1$  sono coprimi, e il numero di regioni generate è  $\frac{(a+2)(b+2)}{2}$ .

Per dimostrarlo, immaginiamo di ribaltare la configurazione ad ogni rimbalzo. Allora, fissando un sistema di riferimento cartesiano, la traiettoria del raggio si può rappresentare come il segmento  $s$  di estremi  $(0, 0)$  e  $(a + 1, b + 1)$  (il quadrato iniziale ha vertici  $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$ ), di coefficiente angolare  $m = \frac{a+1}{b+1}$ . Ora, notiamo che il numero di regioni dipende dal numero di punti di rimbalzo e dal numero di punti di intersezione nella traiettoria del raggio nel quadrato originale: infatti, immaginando di percorrere la traiettoria, ognuno di tali punti dà luogo a una nuova regione.

- Inizialmente c'è una sola regione, costituita dall'intero quadrato. Nel momento in cui il raggio raggiunge il vertice finale, si crea una nuova regione.
- La quantità di rimbalzi totale è  $a + b$  per definizione di  $a$  e  $b$ .
- Resta da contare il numero di intersezioni nella traiettoria del raggio (esclusi i rimbalzi). Osserviamo che su  $s$  ogni tale punto di intersezione appare due volte e che ciascuno di tali punti corrisponde a un'intersezione tra  $s$  e una retta di equazione  $(b + 1)x + (a + 1)y = 2k$ , per qualche  $k$  intero. Tali rette intersecano  $s$  in punti diversi dai suoi estremi per ogni  $k$  compreso tra 1 e  $a + b + ab$ , estremi inclusi; di questi punti, di intersezione, esattamente  $a + b$  corrispondono però ai rimbalzi, già contati. In definitiva, il numero di regioni generate dalle intersezioni nella traiettoria del raggio è  $ab/2$ .

Allora la quantità complessiva di regioni generate è  $2 + a + b + \frac{ab}{2} = \frac{(a+2)(b+2)}{2}$ .

Per concludere, cerchiamo il minimo valore di  $a + b$  tale che  $(a + 2)(b + 2) = 2021 = 2 \cdot 43 \cdot 47$ . Si trova facilmente che  $(a + 2, b + 2) = (47, 86)$ , che verifica anche la condizione necessaria  $\text{MCD}(a + 1, b + 1) = 1$ . La risposta è  $45 + 84 = 129$ .

## 17. Sotto i riflettori [★★]

Ternesto de la Cruz ha organizzato un concerto in un enorme teatro all'aperto, e per garantire una corretta illuminazione occorre allestire dei riflettori. Gli addetti tracciano una prima circonferenza  $\Gamma_1$  di centro  $O_1$  e raggio 39 cm, e una seconda circonferenza  $\Gamma_2$  di centro  $O_2$  e raggio 30 cm rispettivamente, in modo che  $O_1O_2 = 6$  cm. Poi fissano una terza circonferenza  $\Omega$  di raggio 6 cm che sia internamente tangente a  $\Gamma_1$  in  $P$  ed esternamente tangente a  $\Gamma_2$  in  $Q$ ; infine, una quarta circonferenza  $\omega$  tange internamente  $\Gamma_1$  in  $X$  e tange esternamente  $\Gamma_2$  in  $Y$ . Detta  $R$  l'intersezione diversa da  $Q$  tra la retta  $PQ$  e  $\Gamma_2$ , e detta  $Z$  l'intersezione diversa da  $Y$  tra la retta  $XY$  e  $\Gamma_2$ , le rette  $PZ$  e  $XR$  si intersecano in  $L$ . Il luogo del punto  $L$  al variare di  $\omega$  racchiude la regione che risulta illuminata sul palcoscenico: qual è l'area di questa regione, in **decimetri quadrati**?

**Soluzione:** la risposta è 530.

Sia  $O_3$  il centro di  $\Omega$ ; notiamo che per le tangenze risulta che  $P, O_3, O_1$  sono allineati e  $P, Q, O_2$  sono allineati. I triangoli  $O_3PQ$  e  $O_2QR$  sono isosceli e simili tra loro, da cui segue  $O_2R \parallel O_3P$  e in particolare  $O_1P \parallel O_2R$ . Considerazioni analoghe valgono per la circonferenza  $\omega$  rispetto a  $\Gamma_2$ .

Allora, posto  $S = O_1O_2 \cap PR$ ,  $S$  è il centro dell'omotetia di fattore negativo che manda il triangolo  $O_1SP$  in  $SO_2R$ . Questa stessa omotetia manda  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_2$  e  $PX$  in  $RZ$ , che risultano quindi paralleli e con  $PX/RZ = 39/30$ .



Se  $S$  giace all'interno del quadrilatero  $PXRZ$ , allora le rette  $PZ$  e  $RX$  si intersecano in  $L$  al di fuori del quadrilatero, in modo che i triangoli  $PXL$  e  $ZRL$  siano simili con rapporto di similitudine pari a  $39/30 = 13/10$ , da cui  $PL/PZ = 13/3$ . Al variare di  $\omega$ , il luogo di  $Z$  coincide con  $\Gamma_2$ ; di conseguenza, considerando l'omotetia che manda  $P$  in  $Z$ , si vede che il luogo dei punti  $L$  è una circonferenza di raggio pari a  $13/3$  del raggio di  $\Gamma_2$  (poiché  $13/3$  è il rapporto tra  $PL$  e  $PZ$ ). L'area cercata, in centimetri quadrati, è  $\pi \left(\frac{13}{3} \cdot 30\right)^2$ .

## 18. L'ultima benedizione

È quasi l'alba. Dopo aver scoperto che il suo trisavolo è Vécotor, sconfitto Ternesto ed essersi riconciliato con gli spiriti dei suoi antenati, Miquel deve ricevere la benedizione di IMolda e Vécotor per non rimanere intrappolato nel mondo dei defunti. Questa volta, avendo compreso la vera natura di Miquel ed essendosi ricreduta riguardo la musica, IMolda non vuole imporre alcuna condizione; poi però, all'ultimo momento ci ripensa e decide di assegnargli un quesito di matematica. "Sia  $p(x)$  un polinomio di secondo grado a coefficienti interi tale che  $p(3) = 89$  e che per ogni intero positivo  $n$ , gli interi  $p(n)$  e  $p(p(n))$  siano entrambi coprimi con  $n$ ...". Miquel, che ha imparato la lezione, trova senza esitazione il valore di  $p(10)$ .

**Soluzione:** la risposta è 859.

Sfruttiamo il seguente lemma, valido per ogni polinomio a coefficienti interi: se  $a \equiv b \pmod{n}$ , allora  $p(a) \equiv p(b) \pmod{n}$ .

Da  $0 \equiv n \pmod{n}$  ricaviamo  $p(0) \equiv p(n) \pmod{n}$ . Poiché  $p(n)$  è coprimo con  $n$ , anche  $p(0)$  deve esserlo. Affinché ciò sia vero per ogni  $n$  (in particolare per ogni primo),  $p(0)$  deve essere 1 oppure  $-1$ . Per capire qual è il valore corretto tra i due, consideriamo che  $p(0) \equiv p(3) \pmod{3}$ , e ricordiamo che per ipotesi  $p(3) = 89 \equiv 2 \pmod{3}$ , quindi risulta  $p(0) \equiv 2 \pmod{3}$  e allora  $p(0) = -1$ .

Ora calcoliamo  $p(-1)$ . Da  $-1 \equiv p(0) \equiv p(n) \pmod{n}$  otteniamo

$$p(-1) \equiv p(p(n)) \pmod{n}.$$

Il fatto che  $p(p(n))$  sia coprimo con  $n$  implica che anche  $p(-1)$  lo è, quindi come prima si deve avere  $p(-1) = 1$  o  $p(-1) = -1$ . Infine, da

$$p(-1) \equiv p(3) = 89 \equiv 1 \pmod{4}$$

troviamo  $p(-1) = 1$ .

A questo punto, sapendo  $p(0) = -1$ ,  $p(-1) = 1$ ,  $p(3) = 89$  e ricordando che il polinomio è di secondo grado, abbiamo abbastanza informazioni per interpolare il polinomio; possiamo farlo impostando un opportuno sistema di equazioni, per esempio.

Si ricava che  $p(x) = 8x^2 + 6x - 1$  e  $p(10) = 859$ .

## 19. Ricorda $M$ [★]

"Mamá Coco" annuncia Miquel, "Il tuo papà vuole dedicarti questa canzone".

*Ripensa a M  
Non dimenticarlo mai  
Ricorda M  
Dovunque tu sarai  
Lo sai che devi fare se non sono insieme a te  
Scegli un intero positivo  $n < M$  e sarai vicino a me*

*Ricorda M  
Ora devo andare via  
Ripensa a M  
Dividendo  $n$  per 2, 3, 4, ..., 100  
Otterremo 99 resti diversi  
Il tuo amore rimarrà  
Sempre per me.*

Mamá Coco, nell'udire queste note, si risveglia dal torpore: "Il mio papà mi cantava sempre questa canzone... ora ricordo.  $M$  era il minimo comune multiplo degli interi da 1 a 100, estremi inclusi; lui mi chiedeva di trovare ogni intero positivo  $n$  minore di  $M$  tale che, dividendo  $n$  per 2, per 3, per 4 e così via fino a 100, si ottenessero 99 resti diversi". Quanti sono gli interi positivi  $n$  di cui parla Mamá Coco?

**Soluzione:** la risposta è 1025.

Innanzitutto notiamo che esattamente uno tra i resti  $0, 1, 2, \dots, 99$  non compare; inoltre, una volta assegnato un resto a ciascun numero da 2 a 100, per il teorema cinese del resto il numero  $n$  risulta univocamente determinato, se esiste. Supponiamo che per qualche  $a \in \{2, 3, 4, \dots, 100\}$  sia abbia  $n \equiv 0 \pmod{a}$ .  $a$  deve essere primo, altrimenti  $n$  sarebbe multiplo anche dei suoi divisori maggiori di 1. Se  $a > 2$ , allora le congruenze di  $n$  modulo  $2, 3, \dots, a-1$  risultano univocamente determinate: infatti, deve essere  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , e allora l'unica possibilità per 3 è  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , e allora l'unica possibilità per 4 è  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , e così via. Consideriamo ora  $n \pmod{a+1}$ : poiché  $a$  è primo,  $a+1$

non lo è, quindi tale congruenza risulta già determinata (sempre per il teorema cinese del resto), e in particolare deve valere  $n \equiv -1 \pmod{a+1}$ . Ora, se  $2a \leq 100$ , allora la congruenza di  $n$  modulo  $2a$  può essere 0 oppure  $a$  (dato che  $a \mid n$ ), ma questo è assurdo in quanto i resti 0 e  $a$  sono già stati utilizzati; dunque  $a$  è un primo tra 50 e 100.

Ora, supponendo che  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , si dimostra facilmente per induzione che deve valere  $n \equiv k-1 \pmod{k}$  per ogni  $k$  tra 2 e 100 (estremi inclusi) che non è un primo tra 50 e 100. Chiamiamo  $p_1 < p_2 < \dots < p_{10}$  i 10 numeri primi compresi tra 50 e 100. Restano da assegnare come resti 10 elementi dell'insieme  $\{0, p_1-1, p_2-1, \dots, p_{10}-1\}$  ai divisori  $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ . Assegnando il resto a  $p_1$ , poi a  $p_2$  e così via ci sono esattamente 2 possibilità ad ogni passaggio, quindi in tutto  $2^{10} = 1024$  possibilità.

L'ultimo caso da considerare è quello in cui  $n \equiv 0 \pmod{2}$ . Per induzione si può verificare che allora si ha  $n \equiv k-2 \pmod{k}$  per ogni  $k$  tra 2 e 100, estremi inclusi; dunque, c'è un unico valore valido di  $n$  in questo caso.

In definitiva, la risposta è  $1024 + 1 = 1025$ .

## 20. Il frammento mancante

Mamá Coco racconta: “Papà era un musicista... quando ero piccolina, lui e Mamá cantavano delle bellissime canzoni. Ho conservato le sue lettere, le sue poesie e il frammento triangolare di una sua fotografia. Detti  $A, B, C$  i suoi vertici, il lato  $AB$  misura 8 cm, il lato  $BC$  misura 24 cm e l'angolo  $\widehat{ABC}$  è retto. I punti medi dei lati  $BC$  e  $BA$  sono  $M$  e  $N$  rispettivamente. Detta  $\Gamma$  la circonferenza circoscritta ad  $ABC$ , sul suo arco  $AC$  non contenente  $B$  giace un punto  $P$ . La retta  $PM$  interseca  $\Gamma$  nel punto  $P'$  distinto da  $P$ ; infine, le rette  $PA$  e  $P'B$  si intersecano in  $T$ , in modo che i punti  $M, N$  e  $T$  siano allineati”. Quanto misura l'area del triangolo  $ABT$ , in millimetri quadrati?

**Soluzione:** la risposta è 2400.

Notiamo che  $MN \parallel CA$ , quindi

$$\widehat{MTP} = \widehat{CAP} = \widehat{CBP} = \widehat{MBP},$$

il che implica che il quadrilatero  $BMPT$  è ciclico. Posto  $\widehat{MBP'} = \theta$  ed essendo  $\widehat{APC} = 90^\circ$ , ricaviamo

$$\widehat{TPM} = 90^\circ - \widehat{P'PC} = 90^\circ - \widehat{P'BC} = 90^\circ - \theta.$$

Inoltre,  $\widehat{TBM} = 180^\circ - \theta$  e  $\widehat{TBM} + \widehat{TPM} = 180^\circ$ , perciò impostiamo l'equazione  $90^\circ - \theta + 180^\circ - \theta = 180^\circ$ , ottenendo  $\theta = 45^\circ$ .

Detta  $T'$  la proiezione di  $T$  sulla retta  $BC$ , il triangolo  $TT'M$  risulta rettangolo isoscele, simile a  $BMP'$ , anch'esso rettangolo isoscele. Con semplici calcoli si ottiene la lunghezza di  $TT'$ , che è un'altezza di  $ABT$ , e si trova che l'area di  $ABP$  è  $1/4$  dell'area di  $ABC$ .

## 21. Outro: In Ogni Parte Del Mio Corazón [★]

Grazie alla fotografia di Vécior rinvenuta da Mamá Coco, lo spirito di Vécior può attraversare il ponte con il mondo dei vivi. A casa Rivera ora la musica è ben accettata, e Miquel si diverte a cantare e suonare per la sua famiglia. Allo stesso tempo, ha sviluppato una passione per l'algebra, che vuole condividere con la sua sorellina: “Guarda queste foto: è la nostra famiglia. I nostri parenti contano su di noi per essere ricordati: per onorare la loro memoria, scriviamo sull'*ofrenda* un polinomio  $p(x, y)$  non nullo a coefficienti reali nelle variabili  $x$  e  $y$  tale che per ogni numero reale  $a$  valga  $p(\lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor) = 0$ . È importante scegliere  $p(x, y)$  in modo che abbia grado minimo possibile e che il coefficiente di  $y$  sia 4. Qual è il coefficiente di  $x^2y^2$ ? Si ricorda che il grado di un polinomio  $p(x, y)$  è il massimo tra i gradi dei suoi monomi, e che il grado di un generico monomio  $x^m y^n$  è  $m + n$ .

**Soluzione:** la risposta è 216.

In base al valore della parte frazionaria di  $a$ , la coppia  $(\lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor)$  può essere della forma  $(2k, 3k)$ ,  $(2k, 3k+1)$ ,  $(2k+1, 3k+1)$  oppure  $(2k+1, 3k+2)$ , per qualche intero  $k$ .

Osserviamo che ogni coppia  $(2k, 3k)$  è radice di  $3x - 2y$ , ogni coppia  $(2k, 3k+1)$  è radice di  $3x - 2y + 2$ , ogni coppia  $(2k+1, 3k+1)$  è radice di  $3x - 2y - 1$  e ogni coppia  $(2k+1, 3k+2)$  è radice di  $3x - 2y + 1$ . Allora  $p(x, y)$  deve essere divisibile per

$$(3x - 2y)(3x - 2y + 2)(3x - 2y - 1)(3x - 2y + 1).$$

Espandendo questo prodotto si verifica che il coefficiente di  $y$  è proprio 4, quindi  $p(x, y)$  coincide con tale espressione, dovendo avere grado minimo possibile.

Il coefficiente di  $x^2y^2$  è 216.