

1 Gli Angoli

Ben pochi problemi nella geometria delle gare olimpiche hanno soluzioni che non usano angoli o lunghezze, similitudini o congruenze. Visto però che la maggior tecnica è richiesta dai primi, decido di iniziare da essi. La teoria che coinvolge direttamente e solamente gli angoli è piuttosto scarsa, quindi per prima cosa vi voglio mostrare alcuni problemi la cui risoluzione usa unicamente o quasi quella tecnica che in inglese si direbbe *angle-chasing* e che in italiano può ben prendere il nome di *andar per angoli*.

Problema 1- Gara a squadre 2005, semifinale di Cesenatico

ABC è un triangolo isoscele su base AB; A' e B' sono punti su BC e AC tali che AA'C, BB'C, BB'A, AA'B sono isosceli. Sia C' l'intersezione tra AA' e BB'. Calcolare l'angolo A'C'B'.

Nota : non è specificato su che basi i quattro triangoli del testo sono isosceli; risolveremo il problema supponendo che la situazione sia : AA'B isoscele su base A'B e BB'A isoscele su base B'A, AA'C isoscele su base AC e BB'C isoscele su base BC.

Bene, il problema non è certo un IMO e qualcuno potrebbe liquidarlo con due righe e il risultato, ma cerchiamo di vedere un pochino quali sono le (poche) idee chiave della sua soluzione.

I Passo

Se avrete la pazienza di disegnare la figura, noterete che l'angolo richiesto è calcolabile in uno sproposito di modi : come supplementare dell'angolo AC'B' (o BC'A'), come angolo del quadrilatero CA'B'C', come angolo del triangolo ABC'.

Questo passaggio può sembrare banale nello specifico di questo problema, ma è una delle cose che ritengo fondamentali nella soluzione di un problema di geometria : rispondere alla domanda "A che cosa è equivalente la richiesta del testo?".(!!!)

Ora, quando si tratti di calcolare un elemento della configurazione data, il quesito si trasforma in "Cosa devo conoscere per calcolarlo?" e spero che tutti sarete d'accordo con me nel dire che è una domanda indispensabile da porsi; se invece il problema chiede di dimostrare qualcosa, l'utilità del farsi una simile domanda potrebbe non essere evidente, ma è esattamente la stessa, o forse anche maggiore, in quanto ci può suggerire quali sono i passaggi intermedi da compiere per arrivare alla soluzione, ovvero quali sono le altre cose da dimostrare (si spera più semplici). A volte è anche utile chiedersi se esistono fatti che implicano la tesi ma non le sono equivalenti...ma andiamo con calma.

II Passo

Bene, quindi abbiamo trasformato il quesito nel trovare alcuni angoli un po' più amichevoli; ovviamente non possiamo sapere quale delle strade di calcolo indicate più sopra sia la migliore, ma possiamo provare a vedere cosa riusciamo a tirar fuori senza fatica dalle ipotesi.

Vediamo che:

- ABC isoscele su base BA $\Rightarrow \angle ABC = \angle BAC$
- AA'B isoscele su base BA' $\Rightarrow \angle ABA' = \angle BA'A$
- ABB' isoscele su base AB' $\Rightarrow \angle BAB' = \angle AB'B$
- AA'C isoscele su base AC $\Rightarrow \angle A'AC = \angle A'CA$
- BB'C isoscele su base BC $\Rightarrow \angle CBB' = \angle B'CB$

Ora, con un po' più di lavoro vediamo che ci si può ridurre a due sole catene di uguaglianze :

$$\angle ABC = \angle BAC = \angle BA'A = \angle AB'B$$

$$\angle A'AC = \angle A'CA = \angle CBB' = \angle B'CB$$

Non mi pare che ci sia altro da ricavare "ovviamente" dalle ipotesi; o meglio, ci sono altre osservazioni da fare, ma queste non riguardano gli angoli del problema. Ci si può aspettare, con ragione in questo caso, che non si debba andare al di là degli angoli per calcolare gli angoli. Questo modo di ragionare non è sempre efficiente, anzi in molti casi è controproducente, ma per ora siamo sul semplice.

Lo scrivere osservazioni varie e banali che seguono senza sforzo dalle ipotesi è un'altra cosa che mi è sempre molto utile nei problemi di geometria; questa pratica, da condurre con un poco di ordine e di metodo, senza mischiarla con altre parti della dimostrazioni in fieri provenienti invece da buone idee e non da prove random, può dare un'idea delle possibilità che si hanno davanti e delle strade che si possono imboccare.(!!!)

III Passo

"Per comodità di notazione". Questa sarebbe la giustificazione elegante del porre $\alpha = \angle BCA$ $\beta = \angle BB'A$; in realtà non è sempre vero che è comodo chiamare ogni grandezza con una lettera. Nel nostro caso, ne abbiamo solo 2 e quindi la cosa non incasinerà troppo; ma avendo 5 o 6 grandezze da nominare, dare a tutte un secondo nome è solo una perdita di tempo. Ora cerchiamo di legare queste due grandezze; per far ciò dobbiamo ancora ricordarci che non sono alfa e beta, ma degli angoli sulla figura.

Questa parte necessita di pratica oppure di c...o; vediamo ad esempio che

- nel triangolo ABC possiamo scrivere $\alpha + 2\beta = \pi$
- nel triangolo ABA' possiamo scrivere $\angle BAA' = \pi - 2\beta$
- nel triangolo AA'C possiamo scrivere $\angle AA'C = \pi - 2\alpha$
- nel triangolo ABB' possiamo scrivere ... un momento, ma è quella di prima, a meno di simmetria!!
- nel triangolo BB'C possiamo scrivere ... ancora?? già vista, ancora a meno di simmetria.

Nel nostro caso, penso che anche il lattaio del paese si accorgerebbe che la figura è simmetrica, ma, per far le cose in generale, ecco che ne abbiamo una conferma.

Quando si tenta di trovare legami tra le varie parti del problema, le simmetrie giocano un duplice ruolo : il loro uso può aiutare a ricavare uguaglianze e altre relazioni, ma nel contempo la simmetria tra due relazioni può suggerire una più generale simmetria tra gli elementi del problema.(!!!)

Le relazioni ottenute sono assai antipatiche in quanto non contengono solo alfa e beta, ma anche altra roba; del resto finora abbiamo solo usato il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo faccia 180° ...proviamo ad uscire un poco : usiamo gli angoli esterni.

E' noto che un angolo esterno è pari alla somma dei due interni non adiacenti. Quindi troviamo :

$$\angle BB'C = \angle ABB' + \beta$$

sfruttando il triangolo ABB'.

Oppure

$$\beta = 2\alpha$$

sfruttando il triangolo AA'C. Quest'ultima è proprio interessante : lega le due grandezze con le quali avevamo descritto il triangolo.

IV Passo

Una rapida verifica ci permette di notare che, conoscendo alfa e beta, potremmo conoscere l'angolo voluto, basterebbe applicare una delle strade suggerite al punto 1.

A questo punto, allora, non è reato tradurre il nostro problema in termini di algebra ed equazioni.(!!!)

Questo passaggio da geometria ad equazioni è da farsi con attenzione in quanto non sempre quello che vien fuori si presta ad una facile soluzione; del resto è indispensabile sapere tradurre correttamente il problema, in quanto molte volte è la strada più veloce ed elegante.

Nel nostro caso non ci sono molti dubbi :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= \pi \\ 2\alpha &= \beta \end{cases}$$

sfruttando la prima e l'ultima delle relazioni trovate. Quelle intermedie serviranno poi per calcolare l'angolo incognito.

Il sistema ha come soluzione $\alpha = \pi/5 = 36^\circ$ $\beta = 2\pi/5 = 72^\circ$. Ora, A'C'B' poteva essere calcolato ad esempio come angolo del quadrilatero A'B'C'C; l'angolo in C è alfa, gli angoli in A', B' li conosciamo perchè supplementari di beta :

$$\angle AA'C = \angle BB'C = \pi - 2\alpha = 108^\circ$$

Quindi

$$\angle A'C'B' = 2\pi - \alpha - 2\angle AA'C = 360^\circ - 36^\circ - 2 \cdot 108^\circ = 108^\circ$$

Ed ecco la nostra risposta!!

V Passo

Ora scriviamo una soluzione decente :

Poniamo $x = \angle BCA$.

Osserviamo che, per il teorema sull'angolo esterno, $\angle BA'A = \angle A'AC + \angle ACB$. Per ipotesi, AA'C è isoscele su base AC, quindi $\angle CAA' = \angle ACA' = x$ e dunque $\angle BA'A = 2x$. Ancora per ipotesi, BA'A è isoscele su base A'B, quindi $\angle BA'A = \angle ABA' = 2x$. Dunque, sommando gli angoli interni del triangolo ABC, otteniamo $5x = \pi$ da cui $x = 36^\circ$.

Ora, $\angle AA'C = \pi - \angle BA'A = \pi - 2x = 108^\circ$; infine, sommando gli angoli interni di CA'B'C', otteniamo $2\pi = 36^\circ + 2 \cdot 108^\circ + \angle A'C'B'$, da cui il valore cercato è 108° .

Fine del Problema 1

Commenti ed Esercizi

Esercizio 1 Abbiamo dovuto assumere arbitrariamente su quale base fossero isosceli i triangoli del testo; quali altre configurazioni ci sono? il risultato è sempre lo stesso?

Ecco, a questo punto dovrei aver dato l'idea di cosa intendevo con "andar per angoli"...è proprio un po' come cercar funghi.

In questa risoluzione abbiamo usato più volte alcuni fatti :

- teorema dell'angolo esterno
- somma degli angoli interni di un poligono

Spero ovviamente che tutti voi ne conosciate gli enunciati, ma per sicurezza:

Teorema dell'angolo esterno

In un triangolo qualsiasi, un angolo esterno è pari alla somma dei due interni non adiacenti.

Angoli interni

In un generico poligono semplice di n lati la somma degli angoli interni è $\pi(n - 2)$.

Provate, per esercizio, a ritrovare (o ricordare) la dimostrazione di questi due teoremi e cercate di elencare, a mente o per iscritto tutti i teoremi che conoscete sugli angoli; provate ad immaginare in quali situazioni dimostrative ogni singolo risultato potrebbe venirvi utile.

Problema 2 - Teorema della Farfalla

Data una circonferenza, sia PQ una sua corda; si conducano altre due corde AB e CD intersecantisi nel punto medio M di PQ (mettiamo le lettere di modo che AD e BC non si intersechino all'interno della circonferenza). Siano X l'intersezione di AD con PQ e Y l'intersezione di BC sempre con PQ. Dimostrare che M è il punto medio di XY.

Nota : Non allego disegni per spingervi a prendere in mano riga e compasso. Inoltre, preciso che, pur volendo trattare di angoli, nelle osservazioni preliminari alla soluzione parlerò anche di teoremi che non li riguardano, per completezza di esposizione; se non li conoscete, niente paura, non serviranno poi nella soluzione vera e propria.

Allora, certamente questo problema è ben più complicato del precedente, quindi mi dilungherò meno in chiacchiere, soprattutto perchè le osservazioni generali fatte nel precedente post si applicano ancora.

I Passo

In questo caso, un passaggio che prima sembrava banale diventa assai importante : quali sono le forme equivalenti in cui possiamo riscrivere la tesi?

Ebbene, senza un minimo di lavoro sulla figura, sarà difficile smuoversi da $MX=MY$.

Ragionando in generale, per dimostrare che due segmenti sono uguali la strada più immediata è vederli come elementi corrispondenti in triangoli congruenti; oppure possiamo cercare di trovare circonferenze dello stesso raggio in cui i due segmenti vengano visti sotto lo stesso angolo; ancora, potremmo trovare delle relazioni tra le aree delle figure interessate e le lunghezze dei vari segmenti; oppure, il risultato potrebbe ottenersi tramite l'uso di relazioni sui lati dei quadrilateri, come la circoscrivibilità o il teorema di Tolomeo. Non che questi siano gli unici modi, ma (almeno nei problemi che ho visto) sono i trucchi più frequenti per ottenere uguaglianze tra segmenti.

Questo non è però un elenco da imparare a memoria, ma è un esempio di come si possa ragionare nell'affrontare un problema di geometria.

Vediamo ora più nel concreto se alcune di queste tecniche possono applicarsi al nostro problema.

a - Uguali perchè elementi corrispondenti di triangoli congruenti

Nonostante vi siano molti triangoli che hanno MX e MY come lati, è assai improbabile trovare delle congruenze tra questi : basta disegnare due o tre volte la figura variando l'inclinazione delle tre corde e si vede che, ad esempio, i triangoli MAX e MCY non possono essere congruenti

e neppure XDM e YBM. Se vorremo sfruttare la congruenza tra triangoli dovremo rassegnarci a tracciare linee aggiuntive (qualcuno dice che il numero di cose da disegnare in più per arrivare alla soluzione è indice della difficoltà della soluzione...).

b - Uguali perchè visti da angoli uguali in circonferenze uguali

Qui è ovvio che si debbano almeno tracciare le due circonferenze in questione, in quanto l'unica circonferenza data non ha MX e MY come corde. A questo proposito, si può notare che le due circonferenze in questione avrebbero centri sugli assi di MX e MY, sui quali non si trova però nessun altro punto della costruzione, ne vi incidono rette di particolare importanza; questo può significare che è la strada sbagliata, oppure che il problema è molto bastardo.

c - Uguali confrontando aree di opportuni triangoli

Questa strada può sembrare promettente : è noto che se due triangoli hanno un angolo uguale, le loro aree stanno tra loro come i prodotti dei lati adiacenti all'angolo uguale. Quindi, ad esempio, $A_{MXA} : A_{MYB} = MX \cdot MA : MY \cdot MB$ e altre relazioni simili. Se dimostrassimo che in realtà quelle due aree stanno come MA e MB, avremmo finito.

d - Uguali da relazioni tra segmenti date da quadrilateri

Questo approccio è particolarmente scoraggiante perchè, mentre la ciclicità (e quindi ad esempio il teorema di Tolomeo) dipende dagli angoli, la circoscrivibilità dipende solo dai lati e la condizione da dimostrare è proprio quella che vorremmo usare per ricavare informazioni, quindi sembra che questo approccio non conduca molto lontano, a meno di non essere veramente molto furbi.

II Passo

Ora possiamo esaminare le implicazioni più immediate delle ipotesi, o meglio della costruzione. In quanto angoli opposti al vertice, abbiamo che :

$$\angle AMD = \angle CMB$$

$$\angle XMD = \angle CMY$$

e le uguaglianze tra i loro supplementari e le loro differenze. Tramite il teorema degli angoli alla circonferenza, possiamo ricavare queste uguaglianze :

$$\angle ADC = \angle ABC$$

$$\angle DAB = \angle DCB$$

$$\angle BAC = \angle CDB$$

$$\angle DCA = \angle ABD$$

Dal teorema delle corde otteniamo che :

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD = PM^2$$

Se prestate attenzione, dal fatto che M sia punto medio di PQ abbiamo ricavato solo l'ultima uguaglianza (per di più di discutibile interesse). Eppure, il fatto che $PM = MQ$ è l'unico elemento di simmetria del problema; siccome il risultato che ci viene richiesto è ancora una simmetria ($MX = MY$), è auspicabile che questo fatto abbia la sua importanza, visto che di solito

le simmetrie di un problema si conservano dalle ipotesi alla tesi (questa idea non è mia, chi è stato alle conferenze di cesenatico l'ha già sentita). Soprattutto, molte delle informazioni che abbiamo riguardano angoli, e allora, come possiamo esprimere $PM = MQ$ tramite gli angoli?

(vi consiglio di fermarvi un attimo a pensarci prima di proseguire la lettura)

(ci state pensando? bravi!)

(ancora un po' di riflessione...)

Una possibile strada è quella di osservare che, essendo PQ una corda, la perpendicolare a lei dal centro passa per M; introduciamo quindi il punto O, centro della circonferenza in cui tutta questa bagarre ha luogo, e tracciamo il segmento OM; si avrà $\angle YMO = \angle XMO = \pi/2$.

A questo punto, possiamo anche riformulare la tesi in termini di triangoli congruenti: se $MX=MY$, necessariamente i triangoli MOX e MOY sono congruenti perchè sono rettangoli, con un cateto in comune e l'altro cateto uguale; quindi possiamo puntare a dimostrare che $\angle XOM = \angle YOM$.

Da notare il passaggio da un criterio di congruenza ad un altro : uno lo usiamo per dimostrare che i due triangoli sono congruenti, l'altro per ricavare da ciò la tesi.

III Passo

A questo punto, siamo passati a dover dimostrare una uguaglianza di angoli, che, viste le molte relazioni sugli angoli trovate, sembra già più plausibile.

Per proseguire, serve una buona intuizione : possiamo giustificarla con molti ragionamenti, nessuno dei quali risponde però alla domanda "Ma come diavolo ti è venuto in mente?!!!!?".

Per quanto mi riguarda, il prossimo passo è il frutto di queste considerazioni:

- ★ ho tracciato la perpendicolare da O a PQ ed è servito, per le proprietà di simmetria del punto medio ... bene, tracciamone altre
- ★ ho ottenuto due angoli retti, se ne ottengo altri lì vicino posso sperare di beccare qualche quadrilatero ciclico e quindi qualche uguaglianza di angoli alla circonferenza su circonferenze che non siano quella data (la nostra strada b))

Detto ciò ... *Idea : traccio OE e OF perpendicolari a AD e CB.*

Simmetria : E ed F sono anche punti medi di AD e BC, quindi ottengo che i triangoli AEM e CFM sono simili, poichè lo erano ADM e BCM dalle considerazioni sugli angoli al punto 2). (dimostratelo!!)

Ciclicità : XEOM e YFOM sono ciclici, e quindi, per il teorema sugli angoli alla circonferenza ho che $\angle XOM = \angle XEM$ e $\angle YOM = \angle YFM$.

Quindi devo dimostrare che gli angoli XEM e YFM sono uguali, ma a questo serve per l'appunto il precedente argomento di simmetria : i triangoli AEM e CFM sono simili, quindi $\angle XEM = \angle AEM = \angle CFM = \angle YFM$.

E dunque la tesi è dimostrata.

So che vi sembra che io abbia barato nell'ultimo punto, ma non potevate aspettarvi che esistesse un algoritmo per risolvere i problemi di geometria senza avere alcuna idea. Tutto quello che posso

dirvi è perchè mi è sembrata più plausibile quell'idea rispetto alle altre ed è stato appunto per le ragioni di simmetria e di ciclicità.

IV Passo

Riscriviamo la soluzione in maniera decente.

Sia O il centro della circonferenza; tracciamo OM , OE ed OF , dove E ed F sono i punti medi di AD e BC . Osserviamo che, in quanto insistono sugli stessi archi,

$$\angle ADC = \angle ABC$$

$$\angle DAB = \angle DCB$$

$$\angle BAC = \angle CDB$$

$$\angle DCA = \angle ABD$$

e dunque i triangoli ADM e BCM sono simili. Ma allora sono simili anche i triangoli AEM e CFM .

Ora, i quadrilateri $XEOM$ e $YFOM$ sono ciclici in quanto contengono angoli retti opposti; quindi si ha $\angle XOM = \angle XEM$ e $\angle YOM = \angle YFM$, in quanto insistono sullo stesso arco.

Ma per la similitudine sopra detta, $\angle AEM = \angle CFM$, da cui $\angle XOM = \angle YOM$, da cui la tesi per i criteri di congruenza per triangoli rettangoli (applicati a XOM e YOM).

Fine del Problema 2

Commenti ed Esercizi

Esercizio 2 (anche se con gli angoli centra poco) Le altre strade portano a qualcosa ? Ci sono modi di algebrizzare il problema ? (pregasi lasciar fuori la trigonometria).

Infine, come prima, abbiamo usato alcuni teoremi :

Criteri di congruenza dei triangoli

Due triangoli sono congruenti se :

1. hanno congruenti due lati e l'angolo compreso
2. hanno congruenti due angoli e il lato adiacente ad entrambi
3. hanno congruenti i tre lati.

Criteri di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se :

1. hanno gli angoli uguali
2. hanno un angolo uguale e due lati ordinatamente in proporzione
3. hanno i lati ordinatamente in proporzione.

Teorema degli angoli alla circonferenza

Due angoli alla circonferenza che insistono su archi (o corde) uguali sono uguali oppure supplementari.

(perchè nel nostro caso potevamo affermare con tranquillità che valeva l'uguaglianza?)

Caratterizzazione dei quadrilateri ciclici

Un quadrilatero è ciclico se e solo se gli angoli opposti sono supplementari. (caso particolare ma utile, se ha due angoli retti opposti, è ciclico).

Ancora come prima, sarebbe buona cosa conoscere le dimostrazioni di questi teoremi e provare per esercizio a rifarle.

Problema 3 - Esercizio n°6 Gara Individuale, Cesenatico 2005

Si considerino due circonferenze secanti di centri A, B , di modo che il centro dell'una sia esterno all'altra e viceversa. Siano C, D i punti di secanza; si conduca una terza circonferenza per A, C, B e siano E, F le sue ulteriori intersezioni con le due circonferenze precedenti. Dimostrare che la retta CD biseca l'arco EF (non contenente C).

I Passo

Come abbiamo già fatto nei precedenti due, cerchiamo di trovare forme equivalenti della tesi.

Chiamiamo M il punto in cui la retta CD incontra l'arco EF ; la tesi dice che gli archi EM e FM sono congruenti, ovvero che i segmenti EM e MF sono congruenti, quindi possiamo riportarci al discorso svolto per il precedente problema.

Grazie al teorema degli angoli alla circonferenza, possiamo tradurre la tesi in $\angle ECM = \angle MCF$ oppure $\angle EAM = \angle MAF$ oppure ancora $\angle EBM = \angle MBF$, sfruttando il fatto che A, B, C stanno sulla circonferenza di cui EM e MF sono corde.

Con un po' più di fantasia, si potrebbe pensare di introdurre il punto O , centro della circonferenza per C, A, B e chiedere come condizione equivalente alla tesi che $\angle EOM = \angle FOM$, sfruttando stavolta il teorema degli angoli al centro (o equivalentemente quello che lega angoli al centro e alla circonferenza).

Fermiamoci un attimo a considerare quest'ultima trovata : all'apparenza non ha niente di diverso dalle precedenti, si chiede come equivalente alla tesi l'uguaglianza di due angoli che insistono sui due archi che dobbiamo provare essere uguali; in realtà ha due particolarità molto significative rispetto a quanto detto prima.

- a - Quest'uguaglianza è in qualche modo più generale delle altre, in quanto il centro è un punto particolare, mentre non c'è nessun motivo (se non magari di facilità di dimostrazione, ma comunque nessun motivo evidente a priori) per preferire il punto A al punto B o al punto C o a qualunque altro punto sulla circonferenza.
- b - Il centro O non era tra i punti dati nella costruzione, quindi possiamo aspettarci due cose : o che sia tutto più semplice considerando il centro e che quindi il testo del problema non lo menzioni appositamente, o che questo non centri nulla e quindi la soluzione che lo utilizza sia inutilmente complicata e magari affetta da problemi di configurazione.

Tanto per fare un esempio che giustifichi l'ultima affermazione : il centro della terza circonferenza è interno o esterno alle prime due ? Se ad esempio si volesse sapere se la distanza tra A e O è maggiore o minore della distanza tra A e C , per un qualche passaggio dimostrativo, saremmo costretti a fermarci, perchè si possono presentare entrambi i casi e perfino l'uguaglianza.

Quando si introducono nuovi punti o nuove costruzioni, bisogna sempre prestare attenzione all'utilizzo che se ne fa. Non si devono mai fare assunzioni non giustificate dal testo (ma magari dal disegno) sulla posizione di punti e segmenti e quant'altro, soprattutto quando non sono dati dal testo o comunque suggeriti da esso, ma sono tracciati da noi ad hoc.

Dunque, le due caratteristiche dell'ultima affermazione equivalente alla tesi sono l'utilizzo di punti in qualche modo centrali o speciali e l'introduzione di elementi estranei alla costruzione originale.

II Passo

Vediamo ora le conseguenze immediate delle ipotesi, il nostro punto di partenza. Notiamo che vere e proprie ipotesi non ce n'è, ma dobbiamo cercare di ricavare informazioni dal disegno.

Visto che l'abbiamo usato per modificare la tesi, sfruttiamo ancora il teorema sugli angoli che insistono su archi uguali :

$$\angle EAM = \angle ECM = \angle EBM = \angle EFM = \frac{1}{2} \angle EOM$$

$$\angle FAM = \angle FCM = \angle FBM = \angle FEM = \frac{1}{2} \angle FOM$$

$$\angle CAD = 2\angle CED$$

$$\angle CBD = 2\angle CFD$$

e così via ... perdonatemi se non scrivo tutto, ma, almeno in questo caso, è molto meglio fare un po' di disegni che non scrivere, quindi segnate diligentemente sul vostro foglio tutti gli angoli uguali.

III Passo

Ora, come nel precedente problema, ricordiamo che i centri giocano spesso un ruolo ... "centrale" ... nelle costruzioni : ad esempio, date due circonferenze secantisi, esse sono simmetriche rispetto alla retta che congiunge i due centri; nel nostro caso, ad esempio, la circonferenza con centro in A e la circonferenza con centro in O sono simmetriche rispetto alla retta OA . Sotto tale simmetria, i punti comuni si scambiano, quindi E va in C e viceversa, ma nel nostro caso il centro dell'una (A) giace sull'altra e quindi è anche il punto medio dell'arco EC .

Come sottolineato prima, da simmetria viene simmetria e da un centro siamo passati ad un punto medio.

Similmente, B è il punto medio dell'arco CF . Tutto questo segue dalle ipotesi senza particolare sforzo, se non forse un poco di attenzione al voler ricavare dai centri tutto quel che si può.

Ho separato quest'ultima deduzione dalle precedenti in quanto è un po' meno immediata e non è una semplice lettura delle ipotesi; in qualche modo così scegliamo già la strada per risolvere il problema. A questo punto, resta solo da combinare tutto : se A è il punto medio dell'arco EC , allora $\angle EBA = \angle ABC = \angle EFA = \angle AFC = \angle EMA = \angle AMC$ e similmente per l'arco FC bisecato da B .

IV Passo

Ora, viene in aiuto l'aver fatto bene il disegno : a questo punto avrete tracciato almeno alcuni dei lati di questi angoli, tipo i segmenti EB, EF, FA, FC, MA, MC (riporto solo quelli che, plausibilmente, non erano già stati tracciati in precedenza). Se poi si rifà il giochino per gli equivalenti sugli archi CB e BF , si arriverà a notare che le rette FA e EB si incontrano in un punto pericolosamente vicino al punto D .

Quando qualcosa sembra vero nei disegni, prima di cercare di dimostrarlo bisogna cercare di dimostrare la tesi assumendolo per vero; se questa dimostrazione non presenta difficoltà, si può tentare di dimostrare la verità suggerita dal disegno. Non bisogna mai buttarsi a capofitto nel verificare tutte le relazioni suggerite dal disegno; a volte ve ne saranno di vere e interessanti ma inutili per la dimostrazione. Del resto, non bisogna mai dimenticare che spesso l'evidenza dal disegno non ha un corrispettivo nella facilità di dimostrazione.

Pausa meditativa : se così fosse, saprei risolvere il problema ??

Vediamo un po' ... se FA e EB concorrono in D , D è l'incentro del triangolo EFC ; quindi la retta CD è bisettrice dell'angolo $\angle ECF$ e quindi biseca l'arco EF . So che quest'ultimo passaggio sembra una affermazione calata dal cielo ("E chi ci pensa agli incentri?!!"), ma è indispensabile, nell'affrontare problemi di geometria di un certo livello, essere pronti a buttare nella dimostrazione tutte le proprie conoscenze, evitando di ragionare per settori e lasciandosi aperte tutte le strade.

A questo punto possiamo con tranquillità lanciarci nel tentativo di dimostrare che EB e FA si incontrano in D , ovvero che E,B,D e F,A,D sono allineati.

V Passo

Possiamo usare le stesse relazioni tra gli angoli i cui disegni ci hanno portati a supporre l'allineamento : noi sappiamo che $\angle CAB = \angle BAF$, ci basterebbe sapere che anche l'angolo DAB è uguale ai precedenti; richiamando gli argomenti precedenti sulla simmetria di due circonferenze secantisi, ricordiamo che i punti C e D vengono mandati l'uno nell'altro dalla simmetria rispetto alla retta AB e quindi $\angle CAB = \angle DAB$. Quindi abbiamo finito, poichè sappiamo che D sta tra E e B , se è allineato. Similmente si dimostra l'allineamento con A e F .

Piccola nota sull'allineamento e la concorrenza

Per dimostrare che tre rette concorrono in un punto ci sono varie vie, tra cui il riconoscere una costruzione notevole (ad es. l'incentro di un triangolo o i tre assi radiali di tre circonferenze a due a due secanti o simili) oppure il dimostrare l'allineamento tra gli estremi di due segmenti e un punto del terzo. Abbiamo usato entrambe le tecniche.

Altre possibilità sono il Teorema di Ceva per i triangoli oppure la classica (ma lunga) strada delle distanze : si prendono la prima e la seconda retta e si chiama X il loro punto di intersezione, si prendono la seconda e la terza e si chiama Y il loro punto di intersezione e poi si dimostra che la distanza tra X e Y è 0.

Ancora, lo si può dimostrare con gli angoli, in vario modo, ad esempio mostrando che le rette a, b incontrano la retta c formando lo stesso angolo dallo stesso lato della retta c e si incontrano a loro volta.

VI Passo

Ma torniamo a noi : ora non resta che scrivere la soluzione in forma decente.

Per simmetria $\angle CAB = \angle DAB$ e $CB = BF$ (come archi e come corde). Quindi $\angle CAB = \angle BAF$ perchè insistono su archi uguali. Da ciò $\angle BAF = \angle BAD$ e quindi A,D,F sono allineati. Con simile ragionamento si ottiene che E,D,B sono allineati.

Ora, poichè $CB=BF$ e $CA=AE$ (come archi), i segmenti AF e BE sono bisettrici nel triangolo EFC . Quindi D ne è l'incentro e CM è la terza bisettrice e dunque $\angle ECM = \angle MCF$ da cui M biseca l'arco EF .

Fine del Problema 3

Commenti ed Esercizi

Esercizio 3 Vi sarete chiesti cosa centrava in tutto questo il punto O su cui ho insistito tanto : ebbene, esso è la fonte di una soluzione un po' meno calata dall'alto.

Sia OT il raggio perpendicolare alla corda AB . Chiamate $\alpha = \angle AOT$ e ponete $\beta = \angle BOC$.

Provate a ridimostrare il problema 3 partendo da qui e dunque "algebrizzando" il problema (ovviamente in maniera soft : niente trigonometria o geometria analitica). Le sole variabili che vi servono ve le ho definite, ora usatele per concludere che M biseca l'arco EF .

Dunque, alcuni nuovi teoremi che abbiamo utilizzato.

Teorema degli angoli al centro e alla circonferenza

L'angolo sotto cui il centro di una circonferenza vede un arco è due volte l'angolo sotto cui questo viene visto dai punti sulla circonferenza (nel semipiano delimitato dalla corda in cui sta anche il centro).

Varie ed eventuali sulle circonferenze

Il punto medio di un arco è l'estremo del raggio perpendicolare alla corda che sottende l'arco.

La congiungente i centri di due circonferenze secanti è asse della corda comune.

Esistenza dell'incentro

Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo concorrono in un punto chiamato incentro. (Lo sapete dimostrare utilizzando gli angoli e non la definizione di bisettrice con la distanza dai lati?).

Problema 4 - Esercizio n°1 della Prima Giornata, IMO 2004

Sia ABC un triangolo acutangolo in cui i lati AB e AC non siano congruenti; siano M, N le ulteriori intersezioni di AB e AC con la circonferenza di diametro BC e centro O . Detto R il punto di intersezione tra la bisettrice di CAB e la bisettrice di MON , dimostrare che le circonferenze circoscritte a CNR e BMR hanno il punto di ulteriore intersezione sul segmento BC .

Nota : forse a qualcuno non sarà sfuggito il susseguirsi di ben due precisazioni per evitare problemi di configurazioni (acutangolo e non isoscele) e di impossibilità di costruzione; questa evenienza è particolarmente azzeccata in quanto anche durante la soluzione possono incontrarsi affermazioni "ovvie" sulla particolare posizione di un punto che dovranno giustificarsi usando esattamente le precisazioni del testo e con cura. (Vorrei solo dire che il bravissimo Darij Grinberg ha preso 6 su 7 in questo problema proprio per sciocchezze tipo "il tal punto sta nel tal semipiano" etc etc, o almeno così diceva lui)

I Passo

Riscriviamo la tesi in tanti modi equivalenti :

- la tesi sarebbe dimostrata se mostrassimo che P è l'intersezione di BC e di una qualche retta "notevole" nella nostra configurazione;
- la tesi è equivalente a provare che, cmq preso X non allineato con B, P, C , risulta $\angle CPX + \angle XBP = 180^\circ$;
- la tesi è equivalente a provare che esiste un punto di BC conciclico con C, N, R e con B, M, R ;
- la tesi è dimostrata se proviamo che esiste una trasformazione del piano che conserva le rette e che porta 3 punti allineati in C, B, P .

Questi sono i primi modi che qui mi vengono in mente per dimostrare l'allineamento.

Ora, con un po' di riflessione sulla figura, possiamo notare che le ultime due strade non sono molto praticabili : nel primo caso dovremmo avere un modo di costruire questo fantomatico punto conciclico un po' con tutti, senza utilizzare rette (altrimenti ricadiamo nel primo punto) e senza utilizzare trasformazioni del piano (altrimenti arriviamo al punto quarto) e non è che ci siano grandi possibilità, così ad occhio (ovviamente questa è solo una mia impressione, vi invito a farvene una vostra e riflettere sulla figura per un poco prima di proseguire, cercando di vedere se ci sono modi di

costruire un punto siffatto); nell'ultimo punto invece dovremmo trovare una trasformazione, ovvero una simmetria o un'invarianza della figura, ma, ancora è una mia impressione, non ce ne sono di evidenti, nè è pensabile buttare tutto in analitica e scrivere una affinità, vista la presenza delle antipatiche bisettrici.

La prima e la seconda strada sono invece parimenti percorribili, a parte il fatto che nella prima ci vuole circa un 4 disegni per accorgersi di quale rette "buona" intersechi BC in P (bisogna fare un po' di configurazioni per essere sicuri che non sia un caso). Questa strada porta alla conclusione, ma va un po' a fortuna...insomma, bisogna disegnare le cose giuste e avere idee mooolto giuste, quindi la lascio al lettore studioso.

Nella seconda, dobbiamo scegliere il punto X ... beh, una scelta naturale è $X=R$ di modo che gli angoli coinvolti stiano in tanti simpatici quadrilateri ciclici, ed allora vien da scrivere :

$$\angle CPR + \angle BPR = \angle CNR + \angle BMR = \angle ANR + \angle AMR$$

quindi dimostrare la tesi equivale a dimostrare che l'ultima somma scritta fa 180° , ma questo significa esattamente dimostrare che il quadrilatero AMRN è ciclico!!

Ok, ora un po' di riflessione (non nel senso geometrico!) : ce lo potevamo aspettare che il problema fosse equivalente ad uno di conciclicità ? Un poco sì, in quanto tra le ipotesi c'è un quadrilatero ciclico (forse IL quadrilatero ciclico per eccellenza nei triangoli) e nell'espressione della tesi data dal testo si intravedono comunque due altri quadrilateri ciclici; inoltre tutto è espresso in funzione degli angoli e dunque un argomento di ciclicità non dovrebbe essere troppo difficile da cavar fuori.

Insomma, c'è un certo senso estetico in tutto questo ... so che forse non fregherà niente ai miei due (o tre) lettori, ma mi sentivo in dovere di farlo notare (anche i geometri hanno un cuore ed un senso estetico, al contrario degli algebristi).

Attimo di pausa

Vogliamo dimostrare che AMRN è ciclico, ma sotto quali ipotesi ? Il problema è piuttosto diverso dall'originale e ci sono parti della figura che magari ora sono inutili. Vediamo un poco, A è dato nel testo genericamente; M e N determinano con A un triangolo simile ad ABC (dimostratelo!!) quindi generico; R è l'intersezione della bisettrice dell'angolo in A e della bisettrice dell'angolo in O ... se riuscissimo a scrivere quest'ultima cosa in termini di A,M,N potremmo veramente dire di aver ridotto il problema!!

Ok, la bisettrice in A ci sta bene.

Vediamo un attimo la bisettrice di $\angle MON$... dunque, cosa possiamo dire su di lei ?

(pensateci)

(pensateci intensamente)

(rifletteteci con impegno)

(soffermatevici con caparbia)

(...)

Ok, basta scherzare. $MO = ON$ in quanto O è il centro della circonferenza su cui stanno M e N , quindi MON è isoscele su base MN e dunque la bisettrice in O è anche altezza e asse, quindi è perpendicolare a MN e passa per il suo punto medio.

Ok, quindi il nostro problema è questo :

Sia AMN un triangolo acutangolo non isoscele su base MN , sia R l'intersezione tra la bisettrice di A e l'asse di MN . Dimostrare che $AMRN$ è ciclico.

(Se mi permettete un'opinione, questo è un problema molto più carino e sensato che non l'originale, ma è un po' troppo facile da dare a un IMO)

II Passo

Ora, dovremmo cercare ancora una forma equivalente della tesi nel nuovo problema, ma a questo punto è immediato vedere che l'unica cosa a portata di mano è giocherellare un po' con gli angoli, quindi le strade possibili sono, detto K il circocentro di AMN ,

$$\angle MAN + \angle MRN = 180^\circ$$

$$\angle MKN = \angle MRN$$

$$AK = KR \Leftrightarrow \angle RAK = \angle KRA$$

Bene, ma la prima è praticamente la stessa cosa a cui eravamo prima ... se riusciamo a dimostrare lei, riusciamo a dimostrare pure che gli altri due angoli di $AMRN$ sono supplementari, quindi, visto il problema da cui arriviamo, possiamo evitare di tentare questa strada

(fidatevi, oppure, tentatela per un poco e cercate di capire perchè non mi ispira, oppure risolveteci il problema e datemi del cretino)

Ora, della seconda niente da dire, senonchè l'angolo in R non è facilissimo da calcolare ed equivale pericolosamente alla prima; rivolgiamoci alla terza : uno dei due angoli coinvolti è l'angolo tra la bisettrice e la congiungente vertice-circocentro. L'altro è comunque abbastanza coinvolto nelle nostre scarse ipotesi.

III Passo

Bene, a questo punto, permettetemi di sottolineare l'importanza di aver fatto tanti problemi di geometria e soprattutto di avere un poco di memoria per i fattarelli "notevoli" dell'ordinaria geometria : l'angolo tra la bisettrice e la congiungente vertice-circocentro è uguale all'angolo tra la bisettrice e l'altezza da quello stesso vertice; chi conosce questo fatto lo associa subito alla situazione in esame, poichè proprio di uno di quei due angoli stiamo parlando...quindi, tracciamo l'altezza e chiamiamo H la proiezione di A su MN , L il piede della bisettrice e J il punto medio di MN .

Allora, sappiamo che $AH \parallel KR$ poichè entrambi perpendicolari a MN quindi $\angle HAL = \angle KRL$ e dunque $\angle RAK = \angle KRA$ che è equivalente al fatto che $KA=KR$ e quindi alla tesi del problema originale.

"Ok, ma se non so quella cosa lì di bisettrici e altezze"

Beh, non è detto che si debba sapere tutto; questo fatto è veramente elementare e quindi può essere dimostrato con poca fatica, oppure, se uno non se ne accorge, ci si può calcolare l'angolo $\angle LRJ$ e l'angolo $\angle LAK$ in termini degli angoli α , β e γ del triangolo AMN , basandosi sulle seguenti osservazioni : RLJ è un triangolo rettangolo

$$\angle MLA = \angle RLJ$$

$$\angle MKA = 2\angle MNA$$

Questo è lasciato come esercizio al gentil lettore.

IV Passo

Scriviamo la soluzione per bene :

$$\angle CPR + \angle BPR = \angle CNR + \angle BMR = \angle ANR + \angle AMR$$

quindi, B,P,C sono allineati se e solo se AMRN è isoscele; ma osserviamo che in un generico triangolo acutangolo non isoscele, l'incontro tra la bisettrice di un vertice e l'asse del lato opposto sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo.

Siano infatti K il circocentro di AMN, L l'incontro di AR con MN, J il punto medio di MN; tracciamo AH perpendicolare ad MN, allora è noto che $\angle HAL = \angle LAK$, ma $AH \parallel KR$ poichè entrambe perpendicolari a MN, quindi $\angle LAK = \angle HAL = \angle LRJ$ e dunque $KR=KA$, da cui la tesi.

Fine del Problema 4

Commenti ed Esercizi

Ed anche questa è fatta.

Ora, vorrei aggiungere che su *mathlinks.ro*¹ il fatto che AMRN fosse ciclico è stato definito "un ben noto risultato".

Ed adesso, un po' di esercizi, visto che di teoremi nuovi ce n'è punto.

Esercizio 4 : Dimostrare che il simmetrico dell'altezza rispetto alla bisettrice è la congiungente vertice-circocentro tramite le osservazioni fornite sopra.

Esercizio 5 : Trovare una dimostrazione alternativa del problema, sfruttando il primo punto del punto I. *Hint :* P è l'intersezione di BC con AR.

Esercizio 6 : Rifare l'esercizio 4 utilizzando il fatto che la bisettrice di un angolo interno ad un triangolo incontra la circonferenza circoscritta in un punto "importante" (non ve lo dico sennò è troppo facile).

Esercizio 7 : Dimostrare la ciclicità di AMRN tramite la trigonometria.

Esercizio 8 ★ : R è l'incentro di MON.

Esercizio 9 : Utilizzando il risultato dell'esercizio 8, dimostrare che AMRN è ciclico.

Osservazione : dall'esercizio 4 (ovvero il piccolo fatto "noto" usato nell'esercizio), segue che i simmetrici delle altezze rispetto alle bisettrici concorrono; in generale, dato un punto X in un triangolo YZW, i simmetrici rispetto alle bisettrici delle rette XY, XZ, XW, concorrono in un punto X' detto coniugato isogonale di X; quindi la relazione usata nel testo poteva esprimersi dicendo che in un triangolo generico non isoscele il circocentro e l'ortocentro sono coniugati isogonali.

¹se non lo conoscete, visitatelo

Problemi

1 Sia ABC un triangolo e sia H il suo ortocentro. Dimostrare che:

- (a) A è l'ortocentro di BCH , B è l'ortocentro di ACH , C è l'ortocentro di ABH (una simile configurazione di quattro punti si dice *sistema ortocentrico*).
- (b) l'incentro e gli excentri di ABC formano un sistema ortocentrico.

2 ABC è un triangolo acutangolo, H è il suo ortocentro e J, K, L sono le proiezioni di H sui tre lati (il triangolo JKL si dice *triangolo ortico di ABC*). Dimostrare che

- (a) H è incentro di JKL
- (b) A, B, C sono excentri di JKL .

3 Sia ABC un triangolo e sia P un generico punto; dette D, E, F le proiezioni di P sui lati di ABC (o sui loro prolungamenti), chiamiamo DEF *triangolo pedale di P rispetto ad ABC* .

- (a) Calcolare gli angoli del triangolo pedale di P in funzione degli angoli che i segmenti PA , PB , PC formano con i lati.
- (b) Dimostrare che il triangolo pedale di P rispetto al triangolo pedale di P rispetto al triangolo pedale di P rispetto ad ABC è simile ad ABC .

4 (*Teorema di Simson*) Dimostrare che il triangolo pedale di P rispetto ad ABC è degenero ($\Rightarrow$ una retta) se e solo se P si trova sulla circonferenza circoscritta ad ABC . Tale retta si chiama retta di Simson del punto P .

5 Sia ABC un triangolo, H il suo ortocentro; siano D, E, F i simmetrici di H rispetto ai punti medi dei lati di ABC . Dimostrare che A, B, C, D, E, F sono conciclici.

6 Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, sia P l'incontro di AC e DB e siano K, L, M, N le proiezioni di P sui lati. Dimostrare che

- (a) $KLMN$ è circoscrittibile
- (b) $KLMN$ è ciclico se e solo se AC e BD sono perpendicolari.

7 Sia $ABCD$ un quadrilatero; siano a, b, c, d le bisettrici dei suoi angoli esterni in A, B, C, D . Chiamiamo E l'intersezione di a, b , F l'intersezione di b, c , e similmente G, H . Dimostrare che

- (a) $EFGH$ è ciclico
- (b) detta e la perpendicolare da E su AB , f la perp da F su BC e similmente g, h , si ha che e, f, g, h individuano intersecandosi un quadrilatero circoscrittibile.

8 (*Teorema Giapponese*) Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso ciclico; siano I, J, K, L gli incentri di ABC , BCD , CDA , DAB rispettivamente. Dimostrare che

- (a) $ABIL$, $BCJI$, $CDKJ$, $DALK$ sono ciclici
- (b) $IJKL$ è un rettangolo.

9 Sia ABC un triangolo acutangolo e sia JKL il suo triangolo ortico; tracciamo le tangenti in A, B alla cfr circonscritta ad ABC , queste si incontrano in D , tracciamo ora le tangenti in B, C che si incontrano in E , sia inoltre F l'incontro tra la tangente in C e quella in A . Dimostrare che JKL e DEF sono simili (anzi, omotetici).

10 (*Circonferenza dei 9 punti*) Sia ABC un generico triangolo di ortocentro H e circocentro O . Dimostrare che :

- (a) il triangolo pedale di H e quello di O hanno la stessa circonferenza circoscritta
- (b) tale circonferenza passa anche per i punti medi di AH, BH, CH .

11 Sia ABC un triangolo e P un punto in esso; si prolunghino i segmenti AP, BP, CP fino ad incontrare nuovamente la circonferenza circoscritta ad ABC e siano D, E, F tali intersezioni. Dimostrare che DEF è simile al triangolo pedale di P rispetto ad ABC . DEF viene detto *triangolo circumceviano di P rispetto ad ABC* .

12 Sia $A_1 A_2 A_3 A_4$ un quadrilatero ciclico e siano $H_1 H_2 H_3 H_4$ gli ortocentri di $A_2 A_3 A_4, A_1 A_3 A_4, A_1 A_2 A_4, A_1 A_2 A_3$ rispettivamente. Dimostrare che $H_i H_j H_k A_h$ con i, j, k, h una qualche permutazione di $\{1, 2, 3, 4\}$ è un sistema ortocentrico.

13² Cercate di calcolare gli angoli che le ceviane di alcuni punti notevoli formano con i lati di un triangolo generico. Ad es, sia H l'ortocentro di ABC , quanto valgono BAH, HAC in funzione degli angoli di ABC ? Oppure, con il circocentro o altri punti "famosi" che vi vengono in mente. Per alcuni rari casi questo computo è fattibile con geometria elementare; per chi volesse provare con punti tipo il baricentro, temo che serva della solida trigonometria. Comunque, conoscere questi risultati per alcuni punti di solito è comodo.

14³ Sia ABC un triangolo acutangolo, sia M il punto medio di BC e siano BE e CF le altezze di ABC ; sia infine D un punto diverso da M sulla circonferenza circoscritta a MEF tale che $DE=DF$. Dimostrare che :

- (a) detta K l'ulteriore intersezione della circonferenza circoscritta a MEF con BC , EKF è il triangolo ortico di ABC
- (b) AD è perpendicolare a BC .

²Questo non è proprio un esercizio, è solo un consiglio

³Questo problema è il primo del 4° round del 5th Mathlinks Contest, Spring 2005. La richiesta originale del problema era il secondo punto; ho aggiunto il primo come guida ad una soluzione che utilizzi solo gli esercizi svolti in precedenza.