Aspettando Cese - Algebra
Settimo allenamento - Problemi

A1. Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 3x + t = 0$$

sono numeri interi.

B1. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che

$$p(0) = 0 \text{ e } 0 \leq p(1) \leq 10^7$$

Sapendo che esistono due interi positivi a, b tali che $p(a) = 1999$ e $p(b) = 2001$, si determinino i valori possibili di $p(1)$.

C1. Determinare tutte le funzioni f, definite sull'insieme dei numeri interi relativi e a valori nell'insieme dei numeri reali, che soddisfano simultaneamente le seguenti proprietà:

- per ogni coppia di interi (m, n) con $m < n$ si ha $f(m) < f(n)$;
- per ogni coppia di interi (m, n) esiste un intero k tale che $f(m) - f(n) = f(k)$.

D1. Determinare se il seguente enunciato è vero o falso:
"Per ogni successione $x_1, x_2, x_3, ...$ di numeri reali maggiori o uguali a zero esistono due successioni $a_1, a_2, a_3, ...$ e $b_1, b_2, b_3, ...$ di numeri reali maggiori o uguali a zero tali che

- $x_n = a_n + b_n$ per ogni n;
- $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n$ per infiniti valori di n
- $b_1 + b_2 + ... + b_n \leq n$ per infiniti valori di n, eventualmente diversi dai precedenti."