Stage Senior 2025 – Test Iniziale – Versione 10

1. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, e sia ω la più piccola circonferenza che passa per A ed è tangente all'ipotenusa BC. Sia P l'ulteriore intersezione tra ω e il cateto AB, e sia Q l'ulteriore intersezione tra ω e il cateto AC. Sappiamo che i due cateti sono lunghi 12 e 5. Determinare la lunghezza di PQ.

   (A) $3\sqrt{3}$ **(B)** $2\sqrt{6}$ **(C)** $\frac{60}{13}$ **(D)** $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ **(E)** 4

2. Consideriamo l'insieme $\mathbb{X} := \{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$ e il numero

$$M := \sum_{(a,b)\in\mathbb{X}^2} |b - a|.$$

   Determinare quale dei seguenti numeri primi *non* divide M.

   (A) 5 **(B)** 23 **(C)** 3 **(D)** 1013 **(E)** 7

3. Un *trimino* è una mattonella a forma di L ottenuta rimuovendo un quadratino da un quadrato 2×2. Disponiamo ora 8 trimini in una tabella 5×5 in modo da rispettare la quadrettatura, non uscire dai bordi e non creare sovrapposizioni. In questo modo una casella resterà scoperta. Determinare in *quante* posizioni si può venire a trovare la casella scoperta.

   (A) 25 **(B)** 9 **(C)** 16 **(D)** 1 **(E)** 5

4. Per ogni intero a, indichiamo con $d(a)$ il massimo comun divisore tra

$$a - 5 \qquad \text{e} \qquad a^2 + 5a + 25.$$

   Determinare *quanti* valori diversi assume $d(a)$ al variare di a tra tutti gli interi maggiori o uguali a 2026.

   (A) Uno **(B)** Sei **(C)** Quattro **(D)** Due **(E)** Infiniti

5. Sia m il minimo della funzione

$$f(a, b) := \left(18a + \frac{1}{3b}\right)\left(3b + \frac{1}{8a}\right)$$

   al variare di a e b nell'insieme dei numeri reali positivi.
   Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

   (A) m^3 è razionale **(B)** Esistono a e b irrazionali tali che $f(a, b) = m$

   (C) Esiste a razionale tale che $f(a, 2025) = m$

   (D) Esistono a e b interi tali che $f(a, b) = m$ **(E)** m^2 è razionale

6. Sia ABC un triangolo. Sia D il punto del lato BC tale che $CD = 2BD$, sia E il punto medio del lato AC, e sia F l'intersezione tra AD e BE. Sappiamo che l'area del triangolo BDF è uguale a 6.
Determinare l'area del quadrilatero $EFDC$.

(A) 24 **(B)** 27 **(C)** 30 **(D)** 32 **(E)** 25

7. In una classica scacchiera 8×8 vogliamo piazzare 5 torri in 5 caselle distinte in modo che non si attacchino reciprocamente (ricordiamo che due torri si attaccano se e solo se sono nella stessa riga o nella stessa colonna). Indichiamo con d il numero di modi in cui possiamo effettuare tale disposizione.
Determinare quale dei seguenti primi *non* divide d.

(A) 11 **(B)** 7 **(C)** 5 **(D)** 3 **(E)** 2

8. Un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi si annulla per

$$x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}.$$

Determinare quanto vale, come minimo, il grado di $p(x)$.

(A) 3 **(B)** 12 **(C)** 2 **(D)** 1 **(E)** 6

9. Un intero positivo k si dice *realizzato* se esiste un intero positivo n per cui la scrittura in base 10 di $n!$ termina con esattamente k cifre 0. Ad esempio, $k = 2$ è realizzato in quanto $11! = 39\,916\,800$.
Determinare quale dei seguenti interi *non* è realizzato.

(A) 14 **(B)** 11 **(C)** 10 **(D)** 13 **(E)** 12

10. Sia (a, b, c) una terna di interi positivi tali che

$$4^a + 5^b = 7c.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni è sicuramente *falsa*.

(A) $a = 2025$ **(B)** $a + b = 2025$ **(C)** $b = 2026$ **(D)** $a = 2026$ **(E)** $b = 2025$

11. Una successione a_n soddisfa la relazione

$$3a_{n+1} - 1 = 2a_n \qquad \forall n \geq 1.$$

Sappiamo che

- a_1 è un intero compreso tra 1 e 1000,
- esiste un intero m tale che a_m è intero, mentre a_{m+1} non è intero.

Determinare il massimo valore possibile di m.

(A) 7 **(B)** 12 **(C)** 5 **(D)** 3 **(E)** 9

12. In una circonferenza di diametro $AB = 4$ consideriamo i due punti C e D, con D diverso da A, tali che $AC = CD = 1$.
Determinare la lunghezza di BD.

(A) $3\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $\frac{7}{2}$ **(D)** $2\sqrt{3}$ **(E)** $\sqrt{13}$

13. Consideriamo l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano la relazione

$$f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1$$

per ogni coppia (x, y) di numeri reali.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

(A) Se $f(1) = -1$, allora di sicuro $f(\sqrt{2})$ è irrazionale

(B) Se $f(1) = 1$, allora di sicuro $f(3) = 8$

(C) Tutte le soluzioni soddisfano $f(0) = -1$ **(D)** L'insieme contiene infiniti elementi

(E) $f(2025)$ può essere un qualunque numero reale

14. In una circonferenza tre corde parallele, poste dalla stessa parte rispetto al centro, misurano, rispettivamente, 20, 16, 8. La distanza tra le prime due corde è uguale alla distanza tra le ultime due corde.
Determinare il raggio della circonferenza.

(A) $4\sqrt{7}$ **(B)** $9\sqrt{2}$ **(C)** $\frac{5\sqrt{22}}{2}$ **(D)** 12 **(E)** $5\sqrt{5}$

15. Indichiamo con S l'insieme dei numeri da 1 a 10000 che hanno le seguenti tre proprietà:

- si possono scrivere come somma di 5 interi positivi consecutivi,
- si possono scrivere come somma di 7 interi positivi consecutivi,
- non si possono scrivere come somma di 3 interi positivi consecutivi.

Sia s il numero di elementi di S.
Determinare quale dei seguenti numeri primi divide s.

(A) 17 **(B)** 13 **(C)** 29 **(D)** 23 **(E)** 19

16. Il polinomio

$$18x^3 - 21x^2 - 40x + 48$$

è divisibile per il polinomio $(x - r)^2$ per un opportuno numero reale r.
Determinare quale dei seguenti numeri è più vicino a $100r$.

(A) 147 **(B)** 141 **(C)** 137 **(D)** 143 **(E)** 131

17. Sia ABC un triangolo con $AC = 6$ e $BC = 7$. Sappiamo che la mediana uscente dal vertice A è perpendicolare alla mediana uscente dal vertice B.
Determinare la lunghezza di AB.

(A) $\sqrt{17}$ **(B)** $\frac{9}{2}$ **(C)** 4 **(D)** $\frac{17}{4}$ **(E)** $2\sqrt{5}$

18. Sia a_n la successione definita da $a_1 = 2026$ e poi, per ricorrenza,

$$a_{n+1} = (n+1)^{a_n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Determinare quale resto si ottiene quando si divide a_{2022} per 23.

(A) 22 **(B)** 12 **(C)** 1 **(D)** 11 **(E)** 21

19. Ad uno stage vengono invitati 2025 stagisti. Ogni stagista conosce al massimo 100 altri stagisti (la conoscenza è simmetrica, e nessuno include se stesso tra le persone che conosce).
Determinare il più piccolo intero positivo n per cui vale il seguente fatto:

> in ogni stage con le proprietà precedenti, è sempre possibile suddividere i partecipanti in n gruppi, non necessariamente con la stessa numerosità, in maniera tale che in ogni gruppo non ci siano nemmeno due stagisti che si conoscono.

(A) 20 **(B)** 22 **(C)** 21 **(D)** 100 **(E)** 101

20. Determinare *quanti* sono gli interi a (positivi, negativi o nulli) tali che

$$\sqrt{\frac{4a+25}{a-20}}$$

risulta a sua volta un intero.

(A) Quattro **(B)** Nessuno **(C)** Tre **(D)** Uno **(E)** Due