Stage Senior Pisa 2025 – Test Iniziale

Tempo concesso: 150 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi si annulla per
$$x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}.$$
Determinare quanto vale, come minimo, il grado di $p(x)$.

   (A) 12 **(B)** 6 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 1

2. Sia m il minimo della funzione
$$f(a,b) := \left(18a + \frac{1}{3b}\right)\left(3b + \frac{1}{8a}\right)$$
al variare di a e b nell'insieme dei numeri reali positivi.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

   (A) Esistono a e b interi tali che $f(a,b) = m$

   (B) Esiste a razionale tale che $f(a, 2025) = m$ **(C)** m^2 è razionale

   (D) m^3 è razionale **(E)** Esistono a e b irrazionali tali che $f(a,b) = m$

3. Una successione a_n soddisfa la relazione
$$3a_{n+1} - 1 = 2a_n \qquad \forall n \geq 1.$$
Sappiamo che
   - a_1 è un intero compreso tra 1 e 1000,
   - esiste un intero m tale che a_m è intero, mentre a_{m+1} non è intero.

   Determinare il massimo valore possibile di m.

   (A) 3 **(B)** 12 **(C)** 9 **(D)** 7 **(E)** 5

4. Il polinomio

$$18x^3 - 21x^2 - 40x + 48$$

è divisibile per il polinomio $(x-r)^2$ per un opportuno numero reale r.
Determinare quale dei seguenti numeri è più vicino a $100r$.

(A) 141 **(B)** 147 **(C)** 143 **(D)** 131 **(E)** 137

5. Consideriamo l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano la relazione

$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1$$

per ogni coppia (x, y) di numeri reali.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

(A) $f(2025)$ può essere un qualunque numero reale

(B) Se $f(1) = -1$, allora di sicuro $f(\sqrt{2})$ è irrazionale

(C) Se $f(1) = 1$, allora di sicuro $f(3) = 8$ **(D)** L'insieme contiene infiniti elementi

(E) Tutte le soluzioni soddisfano $f(0) = -1$

6. Indichiamo con S l'insieme dei numeri da 1 a 10000 che hanno le seguenti tre proprietà:

- si possono scrivere come somma di 5 interi positivi consecutivi,
- si possono scrivere come somma di 7 interi positivi consecutivi,
- non si possono scrivere come somma di 3 interi positivi consecutivi.

Sia s il numero di elementi di S.
Determinare quale dei seguenti numeri primi divide s.

(A) 13 **(B)** 23 **(C)** 17 **(D)** 19 **(E)** 29

7. Consideriamo l'insieme $\mathbb{X} := \{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$ e il numero

$$M := \sum_{(a,b) \in \mathbb{X}^2} |b - a|.$$

Determinare quale dei seguenti numeri primi *non* divide M.

(A) 3 **(B)** 1013 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 23

8. Ad uno stage vengono invitati 2025 stagisti. Ogni stagista conosce al massimo 100 altri stagisti (la conoscenza è simmetrica, e nessuno include se stesso tra le persone che conosce). Determinare il più piccolo intero positivo n per cui vale il seguente fatto:

   > in ogni stage con le proprietà precedenti, è sempre possibile suddividere i partecipanti in n gruppi, non necessariamente con la stessa numerosità, in maniera tale che in ogni gruppo non ci siano nemmeno due stagisti che si conoscono.

   (A) 21 **(B)** 101 **(C)** 20 **(D)** 22 **(E)** 100

9. In una classica scacchiera 8×8 vogliamo piazzare 5 torri in 5 caselle distinte in modo che non si attacchino reciprocamente (ricordiamo che due torri si attaccano se e solo se sono nella stessa riga o nella stessa colonna). Indichiamo con d il numero di modi in cui possiamo effettuare tale disposizione.
   Determinare quale dei seguenti primi *non* divide d.

   (A) 3 **(B)** 7 **(C)** 5 **(D)** 2 **(E)** 11

10. Un *trimino* è una mattonella a forma di L ottenuta rimuovendo un quadratino da un quadrato 2×2. Disponiamo ora 8 trimini in una tabella 5×5 in modo da rispettare la quadrettatura, non uscire dai bordi e non creare sovrapposizioni. In questo modo una casella resterà scoperta.
    Determinare in *quante* posizioni si può venire a trovare la casella scoperta.

    (A) 16 **(B)** 25 **(C)** 9 **(D)** 5 **(E)** 1

11. In una circonferenza tre corde parallele, poste dalla stessa parte rispetto al centro, misurano, rispettivamente, 20, 16, 8. La distanza tra le prime due corde è uguale alla distanza tra le ultime due corde.
    Determinare il raggio della circonferenza.

    (A) $\frac{5\sqrt{22}}{2}$ **(B)** 12 **(C)** $4\sqrt{7}$ **(D)** $5\sqrt{5}$ **(E)** $9\sqrt{2}$

12. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, e sia ω la più piccola circonferenza che passa per A ed è tangente all'ipotenusa BC. Sia P l'ulteriore intersezione tra ω e il cateto AB, e sia Q l'ulteriore intersezione tra ω e il cateto AC. Sappiamo che i due cateti sono lunghi 12 e 5.
    Determinare la lunghezza di PQ.

    (A) 4 **(B)** $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ **(C)** $3\sqrt{3}$ **(D)** $2\sqrt{6}$ **(E)** $\frac{60}{13}$

13. Sia ABC un triangolo. Sia D il punto del lato BC tale che $CD = 2BD$, sia E il punto medio del lato AC, e sia F l'intersezione tra AD e BE. Sappiamo che l'area del triangolo BDF è uguale a 6.
Determinare l'area del quadrilatero $EFDC$.

(A) 27 **(B)** 24 **(C)** 25 **(D)** 30 **(E)** 32

14. Sia ABC un triangolo con $AC = 6$ e $BC = 7$. Sappiamo che la mediana uscente dal vertice A è perpendicolare alla mediana uscente dal vertice B.
Determinare la lunghezza di AB.

(A) $\sqrt{17}$ **(B)** $\frac{9}{2}$ **(C)** $2\sqrt{5}$ **(D)** 4 **(E)** $\frac{17}{4}$

15. In una circonferenza di diametro $AB = 4$ consideriamo i due punti C e D, con D diverso da A, tali che $AC = CD = 1$.
Determinare la lunghezza di BD.

(A) $\frac{7}{2}$ **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** $\sqrt{13}$ **(D)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $3\sqrt{2}$

16. Determinare *quanti* sono gli interi a (positivi, negativi o nulli) tali che

$$\sqrt{\frac{4a+25}{a-20}}$$

risulta a sua volta un intero.

(A) Due **(B)** Nessuno **(C)** Uno **(D)** Quattro **(E)** Tre

17. Per ogni intero a, indichiamo con $d(a)$ il massimo comun divisore tra

$$a - 5 \qquad \text{e} \qquad a^2 + 5a + 25.$$

Determinare *quanti* valori diversi assume $d(a)$ al variare di a tra tutti gli interi maggiori o uguali a 2026.

(A) Uno **(B)** Due **(C)** Quattro **(D)** Infiniti **(E)** Sei

18. Un intero positivo k si dice *realizzato* se esiste un intero positivo n per cui la scrittura in base 10 di $n!$ termina con esattamente k cifre 0. Ad esempio, $k = 2$ è realizzato in quanto $11! = 39\,916\,800$.
Determinare quale dei seguenti interi *non* è realizzato.

(A) 10 **(B)** 14 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 12

19. Sia a_n la successione definita da $a_1 = 2026$ e poi, per ricorrenza,

$$a_{n+1} = (n+1)^{a_n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Determinare quale resto si ottiene quando si divide a_{2022} per 23.

(A) 12 **(B)** 22 **(C)** 21 **(D)** 1 **(E)** 11

20. Sia (a, b, c) una terna di interi positivi tali che

$$4^a + 5^b = 7c.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni è sicuramente *falsa*.

(A) $b = 2025$ **(B)** $a + b = 2025$ **(C)** $a = 2025$ **(D)** $a = 2026$

(E) $b = 2026$

Test Iniziale 2025 – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	A	D	D	B	D	D	B	E	C	A	E	D	A	A	E	E	C	C	E

Test Iniziale – “Aiutini”

1. Dimostriamo che $x = 1$, da cui segue che x è radice di un polinomio di primo grado a coefficienti interi (e cioè $x - 1$).

   Indicati con a e b i due addendi nella definizione di x, con un facile conto si ottiene che
   $$a \cdot b = \sqrt[3]{25 - 52} = -3$$
   e di conseguenza
   $$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 10 - 9(a+b),$$
   cioè
   $$x^3 + 9x - 10 = 0.$$
   L’unica radice reale di questo polinomio è $x = 1$.

2. Dimostriamo che $m = 25/4$ e non esistono valori interi (positivi) di a e b tali che $f(a,b) = m$.

   Infatti, dalla disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica segue che
   $$f(a,b) = 54ab + \frac{1}{24ab} + \frac{18}{8} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{13}{4} = \frac{25}{4},$$
   con uguaglianza se e solo se
   $$54ab = \frac{1}{24ab},$$
   cioè se e solo se $ab = 1/36$.

3. Il massimo valore possibile di m è 7.

   Per dimostrarlo, osserviamo che la ricorrenza può essere scritta nella forma
   $$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3},$$
   la quale ha come soluzione generale
   $$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot c + 1.$$
   Possiamo ora ricavare c in funzione di a_1, ottenendo che
   $$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot (a_1 - 1) + 1.$$
   Quando a_1 varia tra 1 e 1000, il massimo numero di fattori 3 contenuti in $a_1 - 1$ è 6, corrispondente al caso in cui $a_1 = 3^6 + 1 = 730$. In tal caso i valori di a_n risultano interi fino a $n = 7$, ma a_8 ed i successivi saranno comunque non interi.

4. Dimostriamo che $r = 4/3$, e quindi $100r$ è compreso strettamente tra 133 e 134.

   Per farlo, osserviamo che r è radice del polinomio dato con molteplicità almeno 2, e di conseguenza r deve essere radice anche della sua derivata, cioè di

   $$54x^2 - 42x - 40.$$

   Le radici di questo polinomio di secondo grado sono $x = 4/3$ e $x = -5/9$, come si vede fattorizzandolo oppure usando la formula risolutiva. La seconda, però, per il criterio delle radici razionali, non può essere radice del polinomio iniziale.

   Come ulteriore riprova osserviamo che

   $$18x^3 - 21x^2 - 40x + 48 = (3x-4)^2(2x+3),$$

   fattorizzazione alla quale, con molta pazienza, si poteva arrivare anche applicando il criterio delle radici razionali direttamente al polinomio di partenza.

5. L'affermazione falsa è che, se $f(1) = -1$, allora necessariamente $f(\sqrt{2})$ è irrazionale.

   Per dimostrarlo, scriviamo la funzione f come

   $$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + g(x),$$

   e sostituiamo nell'equazione originaria. Otteniamo così che

   $$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

   che è la classica equazione di Cauchy.

   Se ci restringiamo agli x razionali, le soluzioni dell'equazione di Cauchy sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x) = ax$, con a parametro reale. Questo fatto da solo basta per dimostrare che le affermazioni contenute in quattro delle cinque opzioni sono vere, da cui si potrebbe concludere per esclusione.

   Volendo dimostrare che è possibile avere contemporaneamente che $f(1) = -1$ e $f(\sqrt{2})$ è un numero irrazionale, bisogna utilizzare il fatto che esistono soluzioni esotiche dell'equazione di Cauchy in cui $f(1)$ e $f(\sqrt{2})$ assumono valori reali a scelta. Più in generale, possiamo assegnare arbitrariamente il valore della funzione g su un insieme arbitrario di numeri reali, purché "linearmente indipendenti sui razionali".

6. Indicata con $\lfloor \alpha \rfloor$ la parte intera del numero reale α, dimostriamo che

   $$s = \left\lfloor \frac{10000}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10000}{105} \right\rfloor = 285 - 95 = 190.$$

   La somma di 5 interi positivi a partire da n è $5n+10$, quella di 7 interi consecutivi è $7n+21$, quella di 3 interi consecutivi è $3n+3$. Ne segue che un intero è somma di 5 interi consecutivi se e solo se è multiplo di 5 e maggiore di 10, è somma di 7 interi consecutivi se e solo se è multiplo di 7 e maggiore di 21, è somma di 3 interi consecutivi se e solo se è multiplo di 3 e maggiore di 3.

   Pertanto gli interi che dobbiamo contare sono tutti quelli multipli di 5 e di 7 maggiori 21, quindi i multipli di 35, meno quelli che sono multipli anche di 3, e quindi di 105.

7. Dimostriamo più in generale che, sostituendo 2025 con un intero positivo generico A, si ha che
$$M = 2\sum_{k=1}^{A} k(A-k) = 2A \cdot \sum_{k=1}^{A} k - 2\sum_{k=1}^{A} k^2,$$
da cui
$$M = 2 \cdot \left(A \cdot \frac{A(A+1)}{2} - \frac{A(A+1)(2A+1)}{6} \right) = \frac{(A-1)A(A+1)}{6},$$
e quindi nel nostro caso
$$M = \frac{2024 \cdot 2025 \cdot 2026}{6}.$$

Per dimostrare questa formula, ricorriamo ad una tecnica di double counting. Quante sono le coppie $(a, b) \in \mathbb{X}^2$ tali che $|b-a| = 1$? Sono esattamente $2(A-1)$, in quanto il più piccolo dei due elementi può essere scelto liberamente tra 1 e $A-1$.

Quante sono le coppie $(a, b) \in \mathbb{X}^2$ tali che $|b-a| = 2$? Sono esattamente $2(A-2)$, in quanto il più piccolo dei due elementi può essere scelto liberamente tra 1 e $A-2$.

Analogamente, le coppie $(a, b) \in \mathbb{X}^2$ tali che $|b-a| = k$ sono esattamente $2(A-k)$, in quanto il più piccolo dei due elementi può essere scelto liberamente tra 1 e $A-k$. Visto che ciascuna di tali coppie contribuisce con k alla somma, il loro contributo totale sarà $k(A-k)$.

8. Dimostriamo che il più piccolo intero positivo per cui è sempre possibile la suddivisione è $n = 101$. Per far questo, occorre mostrare due disuguaglianze.

   - Dimostriamo che 101 gruppi possono servire. Consideriamo infatti uno stage a cui partecipa un gruppo di 101 stagisti, ciascuno dei quali conosce tutti i componenti dello stesso gruppo. Gli altri possiamo anche supporre che non conoscano nessuno. Due qualunque stagisti del gruppo da 101 non potranno far parte dello stesso gruppo dopo la suddivisione, e quindi i gruppi in cui suddividere sono almeno 101.
   - Dimostriamo che 101 gruppi bastano sempre. Per far questo seguiamo un procedimento *greedy*. Ordiniamo in qualche modo gli stagisti. Prendiamo il primo e lo inseriamo nel primo gruppo. Poi consideriamo il secondo: se non conosce il primo, lo mettiamo nel primo gruppo, altrimenti lo mettiamo nel secondo gruppo. Procediamo iterativamente allo stesso modo. Più precisamente, dopo aver piazzato k stagisti, consideriamo il $(k+1)$-esimo: se possiamo piazzarlo in un gruppo precedente in cui non conosce nessuno, lo facciamo, altrimenti lo mettiamo da solo in un nuovo gruppo. Siamo sicuri che in questo modo non creeremo mai più di 101 gruppi? Sì! Infatti, se così non fosse, ad un certo punto avremmo 101 gruppi e uno stagista che non sappiamo dove mettere. Ma, per non sapere dove metterlo, servirebbe che costui conoscesse almeno uno stagista in ciascuno dei 101 gruppi già formati, il che per ipotesi non è possibile.

9. Dimostriamo che
$$d = \binom{8}{5}^2 \cdot 120! = 56^2 \cdot 120! = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Osserviamo infatti che le torri non si attaccano reciprocamente se e solo se si trovano in 5 righe diverse e 5 colonne diverse. Pertanto, individuare una possibile disposizione delle torri è equivalente a

- individuare 5 righe tra le 8 disponibili,
- individuare 5 colonne tra le 8 disponibili,
- assegnare in maniera univoca una colonna a ciascuna delle righe prescelte (operazione, questa, equivalente a trovare una funzione iniettiva e surgettiva tra insiemi di 5 elementi).

Le tre operazioni descritte corrispondono ai tre fattori del prodotto che definisce d.

10. Le caselle che possono restare scoperte sono le quattro ai vertici, le quattro in mezzo ai lati, più quella centrale, e quindi 9 in totale.

    Per dimostrare che almeno una di loro resta scoperta, basta osservare che si tratta di 9 caselle, e che ogni trimino può ricoprire al massimo una di esse. Per coprirle tutte dovremmo quindi usare 9 trimini, che però coprirebbero in totale 27 caselle, mentre ne abbiamo solo 25.

    Per completare la soluzione bisognerebbe ora verificare che effettivamente ciascuna di queste caselle può essere l'unica che resta scoperta. Per ragioni di simmetria, basta fare la verifica (e con un po' di tentativi ci si riesce) nel caso di uno qualunque dei vertici, uno qualunque dei punti medi di un lato, e del centro.

11. Dimostriamo che il raggio è uguale a $5\sqrt{22}/2$.

    Per farlo, indichiamo con R il raggio, con a la distanza tra il centro e la corda lunga 20, e con d la distanza comune tra le corde. Dal teorema di Pitagora abbiamo dunque le relazioni

    $$R^2 - a^2 = 100, \qquad R^2 - (a+d)^2 = 64, \qquad R^2 - (a+2d)^2 = 16.$$

    Sostituendo la prima nelle restanti due otteniamo che

    $$d^2 + 2ad = 36 \qquad \text{e} \qquad 4d^2 + 4ad = 84,$$

    da cui $d^2 = 6$ e $ad = 15$. A questo punto si deduce che $a^2 = 225/6 = 75/2$, e infine

    $$R^2 = 100 + a^2 = \frac{275}{2} = \frac{25 \cdot 11}{2}.$$

12. Dimostriamo che $PQ = 60/13$.

    Indichiamo genericamente con a, b, c le lunghezze dei tre lati di ABC, utilizzando le notazioni standard. Osserviamo che il punto di tangenza tra BC e ω è il piede dell'altezza uscente da A, che indichiamo con H. Osserviamo che il quadrilatero $APHQ$ è un rettangolo, dal momento che

    $$\angle ABC = \angle CAH = \angle QHC.$$

    Dal teorema di Euclide deduciamo che $b^2 = a \cdot CH$, da cui $CH = b^2/a$. Dalla similitudine tra i triangoli ABC e QHC deduciamo che $HQ = b^2c/a^2$. In maniera analoga si trova che $HP = c^2b/a^2$.

    A questo punto è immediato calcolare

    $$PQ = \sqrt{\frac{b^4c^2}{a^4} + \frac{b^2c^4}{a^4}} = \frac{bc}{a^2}\sqrt{b^2+c^2} = \frac{bc}{a}.$$

In alternativa, si poteva risolvere il problema anche senza osservare che il quadrilatero $APHQ$ è un rettangolo. Dopo aver calcolato CH, per potenza di C rispetto ad ω si ottiene che $CH^2 = CA \cdot CQ$, da cui $CQ = b^3/a^2$ e quindi

$$AQ = AC - QC = b - \frac{b^3}{a^2} = \frac{(a^2 - b^2)b}{a^2} = \frac{c^2 b}{a^2}.$$

In maniera analoga si ottiene che $AP = b^2 c/a^2$, e si conclude con il teorema di Pitagora applicato in APQ.

13. Dimostriamo che $[EFDC] = 5[BDF]$, dove con le parentesi quadre si intende l'area.

Poniamo per semplicità $x = [BDF]$ e $y = [CFE]$. Poiché le aree di triangoli che hanno la stessa base sono proporzionali alle rispettive altezze, dalle ipotesi del problema deduciamo che $[DFC] = 2x$ e $[AFE] = y$. Inoltre $[CBE] = [EBA]$, da cui $[FAB] = 3x$. Infine $[DAC] = 2[BAD]$, cioè $2x + 2y = 8x$, da cui $y = 3x$.

Ne segue che

$$[EFDC] = [EFC] + [DFC] = y + 2x = 5x.$$

In alternativa si poteva risolvere il problema anche con la geometria analitica, dopo aver osservato che le ipotesi e la tesi sono invarianti per trasformazioni affini. A questo punto ci si poteva ricondurre ad una configurazione più comoda, ad esempio quella in cui $C = (0, 0)$, $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, e calcolare le coordinate di F intersecando le rette AD e BE che ora hanno equazioni particolarmente semplici. Una volta note le coordinate di F, le aree si calcolano facilmente.

14. Dimostriamo che $AB = \sqrt{17}$.

Indichiamo con K il punto medio di BC, con M il punto medio di AC, e con G il baricentro del triangolo. Poniamo $GM = x$ e $GK = y$.

Dalle proprietà del baricentro deduciamo che $GB = 2x$ e $GA = 2y$. Dalla perpendicolarità delle mediane deduciamo che

$$\sqrt{x^2 + 4y^2} = AM = 3 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{4x^2 + y^2} = BK = 7/2.$$

Elevando al quadrato e sommando le due equazioni otteniamo che $x^2 + y^2 = 17/4$, da cui

$$AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = \sqrt{17}.$$

In alternativa, si può notare che il punto medio N di AB è il circocentro di AGB, quindi $AB = 2NG = 2CN/3$. Indicate con a, b, c le lunghezze dei tre lati (con le notazioni standard), dalla formula per la lunghezza della mediana deduciamo che

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2},$$

ovvero $9c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$, da cui

$$c^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2) = \frac{1}{5}(36 + 49) = 17.$$

15. Dimostriamo che $BD = 7/2$.

    Per farlo, indichiamo con R il raggio della circonferenza (che poi è 2), e con θ gli angoli alla circonferenza corrispondenti alle corde AC e CD. Osserviamo che $\angle DAB = 90^\circ - 2\theta$, in quanto AB è un diametro. Ora dal teorema dei seni segue che

    $$AC = CD = 2R\sin\theta,$$

    da cui $\sin\theta = 1/4$. Analogamente avremo che

    $$BD = 2R\sin(\angle DAB) = 2R\sin(90^\circ - 2\theta) = 2R\cos(2\theta) = 2R(1 - 2\sin^2\theta),$$

    da cui sostituendo R e $\sin\theta$ si ottiene il valore di BD.

16. I valori di a per cui l'espressione risulta intera sono tre: $a = 17$, $a = 25$ e $a = 41$.

    Per dimostrarlo, aggiungendo e togliendo 80 al numeratore, riscriviamo l'argomento della radice nella forma

    $$\frac{4a+25}{a-20} = 4 + \frac{105}{a-20}.$$

    Se la radice è intera, a maggior ragione il suo argomento è intero, per cui $a - 20$ deve essere un divisore di 105. Ora i divisori di 105 sono otto (positivi, più altrettanti negativi). Per verifica diretta, quelli che producono un quadrato perfetto all'interno della radice sono -3, 5 e 21, a cui corrispondono i valori di a indicati precedentemente.

17. Dimostriamo che i valori possibili di $d(a)$ sono tutti e soli i divisori positivi di 75, e quindi sono sei.

    Infatti, dividendo $a^2 + 5a + 25$ per $a - 5$ si ottiene come resto 75 (non serve fare la divisione, basta sostituire $a = 5$ nel primo polinomio). Di conseguenza, 75 è il massimo comun divisore dei due polinomi, e quindi ogni numero che divide $a - 5$ e $a^2 + 5a + 25$ per un qualche valore di a deve dividere pure 75. Ne segue che $d(a)$ è un divisore di 75.

    Resta da dimostrare che ogni divisore di 75 è effettivamente $d(a)$ per un qualche a. Per far questo, volendo ottenere il divisore d, basta prendere $a = d + 5$.

18. Dimostriamo che, tra i numeri indicati, l'unico a non essere realizzato è 11.

    Per farlo, ricordiamo che il numero di zeri con cui termina la scrittura in base 10 di $n!$ è uguale alla massima potenza di 5 che divide $n!$, dal momento che i fattori 2 sono più abbondanti dei fattori 5. Ora 45! termina con 10 zeri, così come 46!, 47!, 48! e 49!, mentre 50! termina con 12 zeri, perché 50 contribuisce con due fattori 5. Ne segue che 11 non è realizzato. In modo analogo si verifica che 55! termina con 13 zeri e 60! termina con 14 zeri.

19. Osserviamo che 2020 è multiplo di 11, e di conseguenza $2021 \equiv 1$ modulo 11.

    Ne segue che $a_{2021} = 2021^{a_{2020}}$ è dispari e congruo a 1 modulo 11, quindi in particolare $a_{2021} \equiv 1$ modulo 22.

    Ma allora

    $$a_{2022} = 2022^{a_{2021}} \equiv 2022 \equiv 21 \pmod{23}.$$

20. Possiamo riscrivere l'equazione equivalentemente nella forma

$$4^a + 5^b \equiv 0 \pmod 7.$$

Osserviamo ora che 5 è un generatore modulo 7 e quindi, qualunque sia a, possiamo sempre trovare un b per cui è soddisfatta. Pertanto a può essere un qualunque intero positivo.

Al contrario, 4 non è un generatore modulo 7, e le sue potenze modulo 7 possono valere solo 1, 4, 2. Di conseguenza 5^b può essere solo 6, 3, 5, il che accade quando b è congruo modulo 6 a 3, 5, 1, rispettivamente. In particolare, b può essere uguale a 2025, ma non a 2026.

Infine, osserviamo che è possibile avere $a + b = 2025$: basta considerare, per esempio, il caso in cui $a = 2$ e $b = 2023$.