Cesenatico 1990 - Soluzioni

giove

10 aprile 2008

Problema 1

a) Contiamo innanzitutto le rette che passano per esattamente 3 centri.

Consideriamo innanzitutto le rette che sono parallele ad almeno uno degli spigoli del cubo; queste ovviamente se passano per almeno un centro passano per esattamente 3 centri. Esse avranno 3 direzioni diverse e per ogni direzione avremo $3^2 = 9$ rette. In totale quindi ne avremo $9 \cdot 3 = 27$.

Consideriamo ora le rette che si trovano su un piano parallelo ad almeno una faccia del cubo e che non sono tra quelle considerate prima. Prendendo tre piani paralleli tra loro questi conterranno ognuno 2 rette con le caratteristiche date (le due diagonali del quadrato che si ottiene dall'intersezione del cubo con il piano), quindi ci saranno $2 \cdot 3 = 6$ rette. Dato che ci sono 9 piani, divisi in 3 "terne" di piani paralleli, avremo in totale $6 \cdot 3 = 18$ rette.

Consideriamo ora le rette che non si trovano su piani paralleli ad almeno una faccia del cubo. Queste saranno necessariamente le 4 diagonali (per diagonale in questo caso intendiamo un segmento che unisca vertici con nessuna faccia in comune).

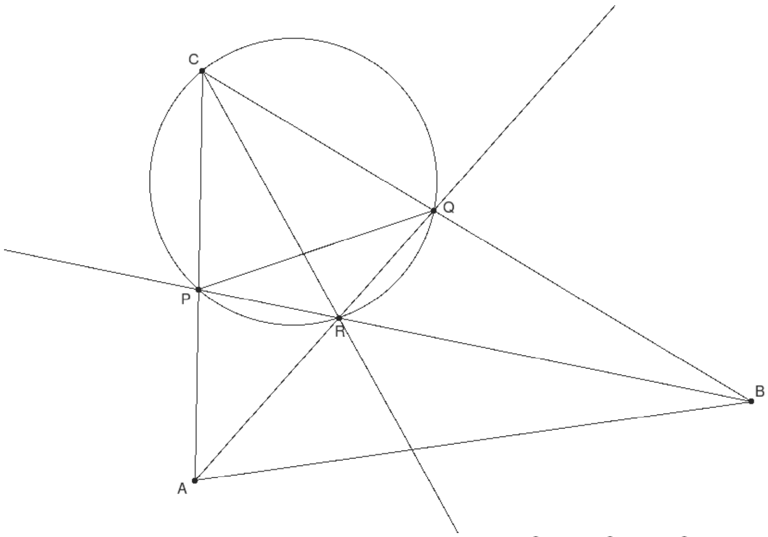
D'altra parte le altre rette che passano per 2 centri non possono passare per un terzo centro, quindi in totale le rette che passano per esattamente 3 centri sono quindi $27 + 18 + 4 = 49$.

Un altro modo per contare queste rette è il seguente: consideriamo il cubo 2x2x2 individuato dai 27 centri dei cubetti dati; per gli 8 centri che stanno sui vertici di questo nuovo cubo passano 7 rette che passano anche per altri 2 centri; per i 12 centri che stanno sugli spigoli ma non sui vertici ne passano 4; per i 6 centri che si trovano sulle facce ma non sugli spigoli ne passano 5; infine per il centro "centrale" ne passano 13. In totale, dato che contiamo 3 volte ogni retta, ne avremo $\frac{8 \cdot 7 + 12 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 13}{3} = 49$.

b) Se contiamo il numero di coppie di centri otterremo il numero delle rette che passano per esattamente 2 centri sommato a tre volte il numero delle rette che passano per esattamente tre centri, perché ogni retta è contata tre volte.

In totale avremo quindi $\binom{27}{2} - 3 \cdot 49 = 204$ rette che passano per esattamente due centri.

Problema 2



Siano α, β, γ rispettivamente gli angoli $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$, secondo le notazioni standard per i triangoli.

Allora per il teorema dell'angolo esterno $\widehat{BPC} = \alpha + \frac{1}{2}\beta$ e $\widehat{AQC} = \frac{1}{2}\alpha + \beta$. La condizione di ciclicità di $CPRQ$ è equivalente a $\widehat{BPC} + \widehat{AQC} = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 120^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 60^\circ$. Quindi $\widehat{PRQ} = 180^\circ - \gamma = 120^\circ$.

D'altra parte $\widehat{PCR} = \widehat{QCR}$ perché R è l'incentro, quindi $PR = QR$ perché sono corde sottese ad archi uguali in quanto gli angoli alla circonferenza che insitono su di essi sono uguali a loro volta.

Quindi considerando il triangolo PQR, questo sarà isoscele su base $PQ = l$ e avrà un angolo al vertice di 120°. Per cui tracciando l'altezza i due triangoli in cui sarà diviso saranno emiequilateri, dunque $PR = QR = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Problema 3

Per il teorema del resto le ipotesi si possono scrivere in questo modo:

(i) $P(a) = a$

(ii) $P(b) = b$

(iii) $P(c) = c$

Consideriamo ora il polinomio $S(x) = P(x) - x$. Questo polinomio avrà come radici a, b, c, quindi si potrà scrivere in questo modo:

$$S(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x)$$

per un certo polinomio $Q(x)$. Quindi avremo che

$$P(x) = S(x) + x = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x) + x$$

quindi il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-a)(x-b)(x-c)$ è $R(x) = x$.

Problema 4

Dato che $a+b+c=1$ la tesi è equivalente a

$$2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+8abc \leq (a+b+c)^3$$

Consideriamo ora il polinomio

$$P(a,b,c)=(a+b+c)^3-2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-8abc \tag{1}$$

Sostituendo $c=a+b$ otteniamo

$$P(a,b,a+b)=8(a+b)^3-8(a^2+b^2+ab)(a+b)-8ab(a+b)=0$$

quindi $P(a,b,c)$ sarà divisibile per $(a+b-c)$ e, per simmetria, anche per $(a+c-b)$ e per $(b+c-a)$. Dato che $P(a,b,c)$ è di terzo grado, avremo che

$$P(a,b,c)=k(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \tag{2}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. È inoltre facile vedere che $k=1$, infatti sviluppando le due scritture per $P(a,b,c)$ il coefficiente di a^3 è -1 nella (1) e $-k$ nella (2).

Quindi la disuguaglianza diventa

$$P(a,b,c)=(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \geq 0$$

che segue direttamente dalla disuguaglianza triangolare, in quanto a,b,c sono le misure dei lati di un triangolo e quindi $(a+b-c),(a+c-b),(b+c-a)$ sono sempre positivi.

Problema 5

Se $169 \mid x^2 + 5x + 16$, allora anche $13 \mid x^2 + 5x + 16$. Possiamo riscrivere questa condizione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x + 16 \equiv 0 \mod 13 \\ \iff & x^2 - 8x + 16 \equiv 0 \mod 13 \\ \iff & (x-4)^2 \equiv 0 \mod 13 \end{aligned}$$

Quindi necessariamente $x \equiv 4 \mod 13$.
Poniamo allora $x = 13k + 4$ e sostituiamo x nella condizione iniziale del testo:

$$\begin{aligned} & (13k+4)^2 + 5(13k+4) + 16 \equiv 0 \mod 169 \\ \iff & 169k^2 + 169k + 52 \equiv 0 \mod 169 \\ \iff & 52 \equiv 0 \mod 169 \qquad (3) \end{aligned}$$

La (3) ovviamente non è mai verificata, quindi non esistono valori di x per cui $169 \mid x^2 + 5x + 16$.

Problema 6

Sia a_i il numero di palline contenuto nel sacchetto i.

Innanzitutto si può osservare che tutti gli a_i devono avere la stessa parità, perché togliendo il k-esimo sacchetto la somma delle palline degli altri sacchetti è $\equiv 0 \mod 2$ (condizione necessaria per dividerli in due gruppi nel modo indicato), quindi $\sum_{i \neq k} a_i \equiv 0 \mod 2$ e allo stesso modo togliendo il j-esimo sacchetto si avrà che $\sum_{i \neq j} a_i \equiv 0 \mod 2$. Sottraendo membro a membro le due relazioni si ottiene proprio $a_k \equiv a_j \mod 2$.

Ora, le ipotesi del problema si possono scrivere con un sistema di $2n + 1$ equazioni omogenee in $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, quindi se gli a_i fossero tutti pari potrei dividerli tutti per 2 ottenendo un problema identico a quello di partenza, in cui dovrei sempre dimostrare che gli a_i sono tutti uguali. Quindi, dividendo per 2 il numero di volte necessario ci si può ricondurre al caso in cui gli a_i sono tutti dispari (infatti devono avere tutti la stessa parità).

Allo stesso modo, togliendo una pallina da ogni sacchetto il problema non cambia, poiché dato che dividiamo ogni volta i sacchetti in due gruppi da n, togliamo sia da una parte che dall'altra n palline. È quindi possibile, una volta che ci siamo ricondotti al caso di tutti gli a_i dispari, togliere 1 a tutti gli a_i, rendendoli pari, e dividere nuovamente per 2 un numero sufficiente di volte perché siano nuovamente tutti dispari. In questo modo tutti gli $a_i > 0$ diminuiscono strettamente.

Ripetendo più volte questa operazione possiamo quindi ricondurci al caso in cui il più piccolo degli a_i, che supponiamo essere a_1, è uguale a 0. Inoltre avendo operato solo con funzioni iniettive (togliendo 1 e dividendo per 2) se in partenza a_i e a_j erano diversi lo saranno anche ora.

A questo punto, dato che $a_1 = 0$, gli a_i saranno tutti pari, quindi sarà possibile dividerli tutti per 2 infinite volte ottenendo sempre dei numeri interi; se dunque ci fosse un $a_k > 0$, questo sarebbe multiplo di 2^r $\forall r \in \mathbb{N}$, assurdo. Allora $a_i = 0$ $\forall i$, quindi all'inizio gli a_i erano tutti uguali.