

Stage Senior Pisa 2026 – Test Iniziale

Tempo concesso: 150 minuti

Valutazione: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia M il più grande numero reale tale che

$$x + y^2 + z^3 \geq M$$

per tutti i reali positivi x, y, z per cui $xyz = 1$. Quale dei seguenti è un numero intero?

- (A) M^{22} (B) $12^8 M^{11}$ (C) $6^{10} M^6$ (D) $12^{10} M^6$ (E) $6^{10} M^{11}$

2. Siano t, s due parametri tali che il polinomio

$$p(x) = x^3 + (9 - t)x^2 + tx + s$$

abbia tre radici reali. Dire quante, al massimo, delle seguenti osservazioni possono essere contemporaneamente vere.

- (a) La somma dei quadrati delle radici è strettamente minore di 45.
- (b) Due radici sono positive e una è negativa.
- (c) t è maggiore o uguale di 22.
- (d) Ci sono due radici di modulo uguale ma segno diverso.

- (A) Una (B) Quattro (C) Zero (D) Due (E) Tre

3. Alberto e Barbara scelgono un numero razionale c , e poi risolvono il seguente problema:
Trovare tutte le funzioni $f: S \rightarrow S$, tali che per ogni $x, y \in S$ sia soddisfatta l'equazione

$$f(f(x) + f(y)) = cx + f(f(y)).$$

Alberto vuole risolvere il problema per $S = \mathbb{Q}$, mentre Barbara per $S = \mathbb{R}$.
Quale delle seguenti affermazioni è vera, per qualsiasi scelta di c ?

- (A) Tutte le soluzioni di Alberto sono polinomi
- (B) Tutte le soluzioni di Barbara soddisfano $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$
- (C) Se Barbara trova almeno una soluzione, anche Alberto ne trova almeno una
- (D) Se Barbara trova almeno una soluzione, ne trova infinite
- (E) Alberto trova almeno una soluzione

4. Determinare quante sono le coppie di interi (a, b) con $1 \leq a, b \leq 101$ tali che

$$(x^2 + x + 1)^a - (x^2 - x + 1)^b$$

sia divisibile per $x^2 + 1$.

- (A) 2500 (B) 5100 (C) 625 (D) 2601 (E) 2550

5. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(4) = 1$, $p(10) = 7$. Quanti sono al massimo gli interi n per cui $p(n) = n + 2$?

- (A) Due (B) Infiniti (C) Quattro (D) Uno (E) Zero

6. Andrea disegna tutti i rettangoli i cui lati sono lunghi un numero intero di cm e che hanno perimetro 2026 cm. (Nota: se $a \neq b$, Andrea disegna sia il rettangolo $a \times b$ che il rettangolo $b \times a$). Sia M la somma delle aree di tutti i rettangoli disegnati da Andrea. Determinare quale dei seguenti numeri è un divisore di M .

- (A) 31 (B) 11 (C) 7 (D) 3 (E) 19

7. Sia N la somma di tutti i palindromi di 5 cifre, con la prima cifra significativa diversa da zero. Quanti divisori positivi ha N ?

- (A) 144 (B) 42 (C) 72 (D) 126 (E) 252

8. Quante di queste tabelle rettangolari si possono tassellare con tetromini (tessera composta da quattro quadretti) a forma di L ?

$$2024 \times 2025$$

$$2024 \times 2026$$

$$2025 \times 2026$$

$$2026 \times 2026$$

- (A) Tre (B) Zero (C) Una (D) Quattro (E) Due

9. Dato un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{Z}_{>0}$, indichiamo con $m(X)$ il suo elemento più piccolo. Se S è il valore della somma

$$\sum_{\substack{X \subseteq \{1, \dots, 2026\} \\ X \neq \emptyset}} m(X),$$

determinare il resto della divisione di S per 2027.

- (A) 2026 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) 2025

10. Alberto e Barbara giocano al seguente gioco. Inizialmente, una pila di N monete è riposta sul tavolo; poi a turno, cominciando da Alberto, un giocatore può togliere 5, 10, 12 oppure 17 monete. Perde chi non può più muovere. Per quanti interi $N \in \{2000, 2001, \dots, 2026\}$ Alberto ha una strategia vincente?

- (A) 21 (B) 19 (C) 6 (D) 20 (E) 8

11. Sia ABC un triangolo con $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$ e $\angle BCA = 65^\circ$. Sia O il circocentro di ABC ; siano P e Q i simmetrici di O rispetto ai lati BC ed AC , rispettivamente. Chiamato H l'ortocentro di $\triangle ABC$, calcolare l'angolo $\angle HPQ$.

- (A) 35° (B) 25° (C) 22.5° (D) 45° (E) 15°

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero con lati $AB = 10$, $BC = 12$, $CD = DA = 15$ e diagonale $AC = 16$. Siano P su AB e Q su BC tali che $BP = BQ = 4$, R su CD tale che $DR = 6$ e S su AD tale che $DS = 5$. Calcolare il rapporto tra l'area di $PQRS$ e $ABCD$.

- (A) $\frac{31}{60}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{6\sqrt{2}}{17}$ (E) $\frac{7}{15}$

13. Sia $PQRS$ un quadrilatero ciclico con i vertici in quest'ordine; siano H , K sul prolungamento di PQ dalla parte di P , con K tra P e H , tali che

$$\angle QSP = \angle PSK = \angle KSH \quad \angle RPQ = \angle SKP = 90^\circ.$$

Sapendo che $SQ = 100$, $SH = 35$, $HQ = 117$, quanto misura RP ?

- (A) 125 (B) 75 (C) 100 (D) 117 (E) 150

14. Sia $ABCD$ un quadrato di lato 6; detto M il punto medio di BC , sia P l'intersezione di DB e AM . La circonferenza circoscritta a APB incontra la retta AD in A e Q . Quanto vale l'area di AQB ?

- (A) 18 (B) 4 (C) 6 (D) 12 (E) 9

15. Sia $ABCD$ un quadrato e sia P all'interno del quadrato tale che BCP sia un triangolo equilatero. Detta Q l'intersezione di CA con BP , calcolare l'area di CQB sapendo che l'area di CQP è 1.

- (A) $\sqrt{3} + 1$ (B) $\sqrt{3} - 1$ (C) $3 - \sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3} + 2$ (E) $2 - \sqrt{3}$

16. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b) tali che $a^2 + a + 2026 = b^2 + b$?

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

17. Consideriamo il numero

$$N := \prod_{k=1}^{2026} (k^2 + k + 1) .$$

Determinare il più grande intero e tale che 3^e divide N .

- (A) 674 (B) 2025 (C) 2026 (D) 675 (E) 676

18. Quanti sono gli interi b con $1 \leq b \leq 2025$, relativamente primi con 2025, per cui esiste un intero a tale che 2025 divide $b - a^6$?

- (A) 135 (B) 60 (C) 90 (D) 45 (E) 180

19. Siano $p = 31$ e $q = 73$. Determinare per quanti interi a compresi fra 0 e $pq - 1$ (estremi inclusi) esiste un intero b tale che pq divida $b^2 - ab + 1$.

- (A) 540 (B) 1110 (C) 555 (D) 592 (E) 576

20. Un intero positivo n è *men che perfetto* se

$$\sigma(n) = n + 13 ,$$

dove $\sigma(n)$ è la somma di tutti i divisori interi positivi di n (inclusi 1 e n). Se M è il prodotto di tutti i numeri men che perfetti, quale dei seguenti interi *non* divide M ?

- (A) 105 (B) 75 (C) 45 (D) 15 (E) 21