

Gara Nazionale 1994

Problema 1

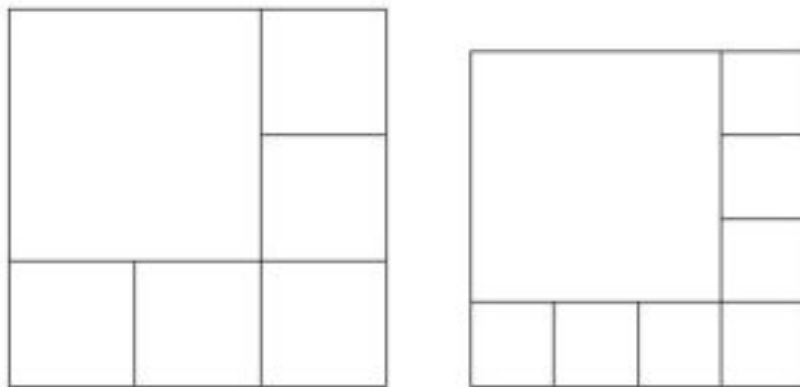
Si dimostri che esiste un intero N tale che per ogni $n \geq N$ e' possibile suddividere un quadrato in n quadratini a due a due disgiunti.

(Due quadratini sono considerati disgiunti se non hanno punti interni in comune).

SOLUZIONE

Si nota innanzitutto che se e' possibile dividere un quadrato in n quadratini disgiunti, allora e' possibile dividerlo in $n + 3$: basta dividere un quadratino in quattro quadrati congruenti disgiunti (unendo i punti medi dei lati opposti) per incrementare di 3 il numero di quadratini presenti.

Ovviamente e' possibile dividere un quadrato in 1 quadratino, quindi e' possibile dividerlo in n quadratini per ogni n della forma $3k+1$. La figura seguente mostra come sia possibile suddividere un quadrato rispettivamente in 6 ed 8 quadratini disgiunti:



Pertanto e' possibile dividerlo in n quadratini per ogni n della forma $3k$, con $k \geq 2$, e della forma $3k + 2$, sempre con $k \geq 2$.

Di conseguenza per $n \geq 6$ e' possibile soddisfare le condizioni.

Problema 2

Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $y^2 = x^3 + 16$.

SOLUZIONE

Si nota innanzitutto che se $x < 0$ dev'essere $x = -1$ o $x = -2$, altrimenti il lato sinistro dell'equazione sarebbe positivo ed il destro negativo. Entrambi i casi non portano a soluzione.

Del resto se $x = 0$ si ha soluzione con $y = \pm 4$. Si assuma quindi senza perdita in generalita' che $x > 0$ e $y > 0$.

L'equazione e' equivalente a

$$x^3 = (y + 4)(y - 4)$$

Si distinguono ora due casi a seconda della parita' di y .

Se y e' dispari si ha che $\gcd(y + 4, y - 4) = \gcd(8, y - 4) = 1$ quindi sia $y + 4$ che $y - 4$ devono essere cubi perfetti. Deve ossia valere, per una qualche scelta di a, b interi

$$y + 4 = a^3$$

$$y - 4 = b^3$$

Sottraendo le due relazioni si ottiene $8 = a^3 - b^3$, ossia $2^3 + b^3 = a^3$, che non ha soluzioni (si lascia al lettore quest'ultimo fatto).

Si assuma ora che y e' pari. In questo caso anche x e' pari, percio' $8|x^3 + 16$, di conseguenza dev'essere $4|y$, ma quindi $16|y^2$, pertanto deve valere $16|x^3 + 16$, vale a dire $4|x$. Si ponga $x = 4x_1$, $y = 4y_1$. L'equazione diventa $y_1^2 = 4x_1^3 + 1$ ossia

$$4x_1^3 = (y_1 + 1)(y_1 - 1)$$

Poiche' $\gcd(y_1 + 1, y_1 - 1) = 2$ uno tra $y_1 + 1$ e $y_1 - 1$ dev'essere il doppio di un cubo perfetto, e di conseguenza anche l'altro. Deve ossia valere

$$y_1 + 1 = 2a^3$$

$$y_1 - 1 = 2b^3$$

Sottraendo queste due relazioni si ottiene $2 = 2a^3 - 2b^3$, vale a dire

$$b^3 + 1 = a^3$$

equazione che non ha soluzioni.

Le uniche soluzioni sono pertanto

$$(x, y) = (0, -4); \quad (x, y) = (0, 4)$$

Problema 3

Un giornalista deve fare un articolo su una classica isola di furfanti e cavalieri, in cui tutti gli abitanti o mentono sempre (e sono furfanti) o dicono sempre la verita' (e sono cavalieri) e tutti si conoscono reciprocamente. Supponiamo che il giornalista intervisti una e una sola volta tutti gli abitanti ed ottenga nell'ordine le seguenti risposte:

A_1 : "sull'isola c'e' almeno 1 furfante"

A_2 : "sull'isola ci sono almeno 2 furfanti"

...

A_{n-1} : "sull'isola ci sono almeno $n - 1$ furfanti"

A_n : "sull'isola ci sono n furfanti"

Puo' il giornalista stabilire se sull'isola ci sono piu' furfanti o piu' cavalieri?

SOLUZIONE

Per prima cosa si osserva che se sull'isola ci sono i furfanti si ha che A_i e tutti quelli intervistati prima di lui dicono il vero e tutti gli altri dicono il falso. Questi ultimi sono in totale $n - i$, pertanto deve valere la relazione

$$i = n - i$$

che equivale a

$$i = \frac{n}{2}$$

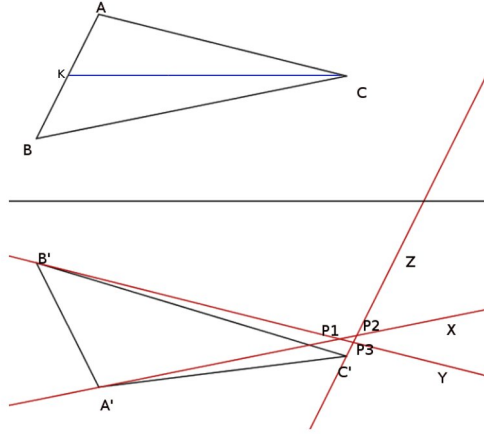
Di conseguenza i furfanti sono tanti quanti i cavalieri (si noti che ovviamente cio' e' possibile solo in un'isola con un numero pari di abitanti).

Problema 4

Si consideri una retta r ed un triangolo ABC che giace in uno dei due semipiani individuati da r . Detti A' , B' , C' i punti simmetrici di A , B , C rispetto a r , si conduca da A la parallela a BC , da B la parallela ad AC e da C la parallela ad AB . Si dimostri che queste tre rette passano per uno stesso punto.

Si segnalano tre soluzioni.

PRIMA SOLUZIONE



Siano X, Y, Z punti tali che $A'X \parallel BC$, $B'Y \parallel AC$, $C'Z \parallel AB$.

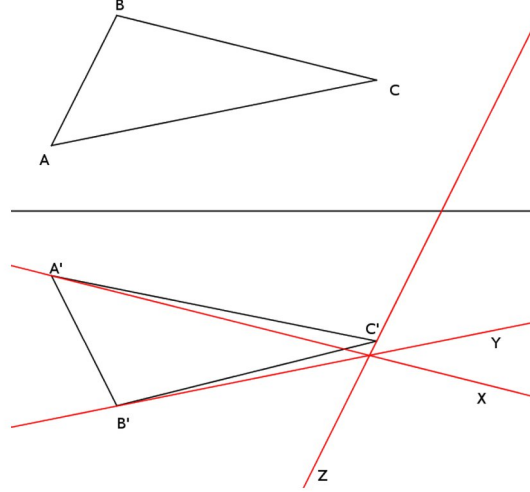
Si supponga che le tre rette considerate non concorrano: siano quindi P_1 , P_2 , P_3 rispettivamente le intersezioni delle rette $A'X$ e $B'Y$, $A'X$ e $C'Z$, $B'Y$ e $C'Z$.

Poiché $A'X \parallel BC$ e $B'Y \parallel AC$ si ha che $\angle A'P_1B' = \angle ACB = \angle A'C'B'$, quindi P_1 sta sulla circonferenza circoscritta ad $A'B'C'$. Con le stesse argomentazioni si prova che anche P_2 e P_3 stanno su tale circonferenza.

Sia ora K il punto in cui la parallela a r passante per C incontra il lato AB . Per costruzione si ha che $\angle C'B'P_2 = \angle C'A'P_2 = \angle BCK - \angle ACK$; inoltre $\angle C'B'P_3 = \angle BCK - \angle ACK = \angle C'B'P_2$.

Poiché P_2 e P_3 stanno sulla stessa parte di $C'Z$ rispetto a C' , segue che tali punti coincidono. Di conseguenza le tre rette considerate concorrono.

SECONDA SOLUZIONE



Siano α , β , γ gli angoli acuti individuati con la retta r rispettivamente dalle rette BC , AC , AB . Siano X, Y, Z come nella precedente soluzione. Per la versione trigonometrica del teorema di Ceva le rette $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ concorrono se e solo se vale la relazione

$$\frac{\sin C'A'X}{\sin XA'B'} \cdot \frac{\sin A'B'Y}{\sin YB'C'} \cdot \frac{\sin B'C'Z}{\sin ZC'A'} = 1$$

Si nota che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\angle C'A'X = \beta - \alpha, \quad \angle A'B'Y = \gamma - \beta, \quad \angle B'C'Z = \gamma + \alpha$$

$$\angle XA'B' = \pi - \gamma - \alpha, \quad \angle YB'C' = \beta - \alpha, \quad \angle ZC'A' = \gamma - \beta$$

Quindi si ha che

$$\frac{\sin C'A'X}{\sin XA'B'} \cdot \frac{\sin A'B'Y}{\sin YB'C'} \cdot \frac{\sin B'C'Z}{\sin ZC'A'} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\pi - \gamma - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin(\gamma - \beta)} = 1$$

Pertanto le rette concorrono.

TERZA SOLUZIONE

Poiché sono coinvolti solo parallelismi e simmetrie, non appare insensato fare uso di geometria analitica. Si sceglie come asse x la retta r . Inoltre si assume senza perdita di generalità che il punto B del triangolo coincide con l'origine (e di conseguenza anche B'), in quanto la tesi è invariante per traslazione del triangolo ABC . I punti A e C hanno coordinate (x_A, y_A) e (x_C, y_C) , pertanto A' e C' avranno coordinate $(x_A, -y_A)$ e $(x_C, -y_C)$. Definiamo inoltre X, Y, Z

come nella precedente soluzione. I coefficienti angolari delle rette AB , BC , CA sono rispettivamente

$$\frac{y_A}{x_A}, \quad \frac{y_C}{x_C}, \quad \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}$$

Le rette $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ avranno quindi rispettivamente equazioni

$$y = \frac{y_C}{x_C}x - \frac{y_C}{x_C}x_A - y_A, \quad y = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}x, \quad y = \frac{y_A}{x_A}x - \frac{y_A}{x_A}x_C - y_C$$

Mettendo a sistema le prime due rette si trova che il punto P della loro intersezione ha coordinate

$$x_P = \frac{(y_A - y_C)x_C + (x_A - x_C)(x_A y_C + y_A x_C)}{y_C(x_A - x_C)}$$

$$y_P = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \cdot \frac{(y_A - y_C)x_C + (x_A - x_C)(x_A y_C + y_A x_C)}{y_C(x_A - x_C)}$$

Inserendo queste coordinate nell'equazione della terza retta (e sviluppando brutalmente i lunghi e noiosi conti) si ottiene un'identità, quindi anch'essa passa per P .

Problema 5

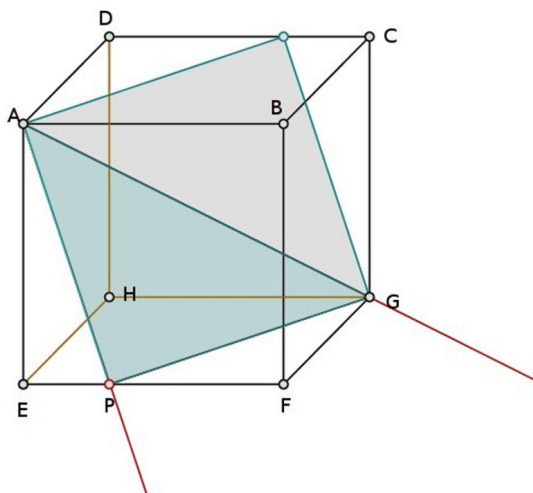
Si consideri un cubo di spigolo unitario e sia OP una sua diagonale. Si determini il valore minimo e il valore massimo dell'area della figura che risulta dall'intersezione fra il cubo e un piano passante per OP .

SOLUZIONE

Per la dimostrazione sara' utile la seguente uguaglianza, la cui dimostrazione e' particolarmente semplice ed e' pertanto lasciata al lettore:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \\ & = 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \end{aligned}$$

valida ovviamente per $a, b, c \geq 0$.



Per comodita' di notazione al posto di OP si usera' AG . Si noti innanzitutto che l'intersezione del cubo con un piano per AG e' tagliata in due parti identiche dal piano passante per i vertici A, C, E, G . Possiamo pertanto considerare senza perdita in generalita' solo una delle due meta' in cui il cubo risulta diviso da quest'ultimo piano.

Il piano passante per AG interseca uno degli spigoli EF, FB, BC in un punto che chiameremo P . Possiamo inoltre assumere senza alcuna perdita in generalita' che P sta su EF , in quanto se stesse su uno degli altri due spigoli si avrebbe la medesima configurazione, ruotata.

Sia x la lunghezza di EP : si ha che $0 \leq x \leq 1$. Si ha che AG e' lungo $\sqrt{3}$, essendo una diagonale, mentre i segmenti AP e PG risultano lunghi, per il teorema di Pitagora, rispettivamente

$$\sqrt{1+x^2}; \quad \sqrt{x^2-2x+2}$$

Inoltre l'intersezione cercata risulta il doppio di un triangolo avente queste lunghezze per lati.

Sia $AP^2 = a$, $PG^2 = B$, $AG^2 = c$. Il triangolo APG , per la formula di Erone, ha area

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{16}} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{16} (2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

Pertanto l'intersezione cercata ha area

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} (2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2)}$$

Poiche' una superficie e' sempre positiva, non vi e' alcuna differenza tra cercare massimo e minimo di essa o del suo quadrato. Consideriamo quindi A^2 .

Si ha che

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{2[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) + 3(x^2 - 2x + 2) + 3(x^2 + 1)] - (x^2 + 1)^2 - (x^2 - 2x + 2)^2 - 9}{4} = \\ &= 2x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Tale grandezza e' una parabola; pertanto assume minimo nel vertice $x = \frac{1}{2}$ e massimo negli estremi dell'intervallo in cui e' definita, ossia per $x = 0$ e $x = 1$. In corrispondenza del valore di minimo si ottiene $A^2 = \frac{3}{2}$ da cui

$$A_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Mentre in corrispondenza del massimo si ottiene $A^2 = 2$ da cui

$$A_{\max} = \sqrt{2}$$

Problema 6

Si consideri una scacchiera 10×10 e in ogni sua casella siano indicati ordinatamente i numeri da 1 a 100 incominciando dalla prima casella in alto a sinistra, andando verso destra fino a terminare la prima riga e poi proseguendo con la seconda riga sempre da sinistra a destra, fino ad arrivare alla centesima casella in basso a destra. Supponiamo ora di cambiare i segni a 50 di questi numeri con la condizione che in ogni riga e in ogni colonna ci siano tanti numeri positivi quanti negativi. Si dimostri che, dopo tale cambiamento, la somma di tutti i numeri e' zero.

SOLUZIONE

Si nota innanzitutto che e' possibile sommare un intero n al valore assoluto di tutti i numeri di una stessa riga o di una stessa colonna senza che la somma totale cambi: questo perche' n verra' considerato 5 volte con segno positivo ed altrettante con segno negativo.

A questo punto si somma 90 a tutti i numeri della prima riga, 80 a quelli della seconda e cosi' via fino a sommare 10 a tutti i numeri della penultima riga. Dopo questa operazione tutte le righe saranno uguali. Poiche' in ogni colonna vi sono solo numeri uguali, la somma dei numeri di ogni colonna (presi ciascuno con il proprio segno) sara' nulla, e cosi' anche la somma totale. Poiche' le operazioni effettuate non hanno mutato la somma totale, segue che essa era nulla anche inizialmente.

SOLUZIONE ALTERNATIVA

LEMMA:

siano date una n -upla (a_1, \dots, a_n) ed una sua permutazione $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$: e' possibile ottenere la sua permutazione mediante una serie di scambi di due elementi.

Per $n = 2$ il lemma e' ovvio; si supponga vero per $n - 1$ elementi. Allora se passo a n elementi non devo fare altro che mandare al posto giusto a_n scambiandolo con l'elemento che occupa il posto in cui dovrebbe andare e ricondurmi quindi al caso $n - 1$. Pertanto il lemma e' sempre vero per induzione.

Per prima cosa coloro di nero le caselle i cui numeri hanno segno negativo, e di bianco le altre.

Noto innanzitutto che se scambio tra loro due colonne, oppure due righe, non cambia la somma dei numeri: difatti se le caselle corrispondenti sono dello stesso colore non vi e' alcun problema, mentre se in una riga (colonna) vi sono delle bianche le cui corrispondenti nell'altra sono nera, vi sono necessariamente altrettante nere le cui corrispondenti sono bianche: cio' fa si che dopo lo scambio la somma totale rimanga invariata. Pertanto, per il lemma, posso riordinare le righe e le colonne come preferisco.

Inoltre se ho un quadratino 2×2 colorato nero-bianco/bianco-nero, posso cambiare colore ad ogni sua casella senza cambiare la somma dei numeri: in una riga i negativi aumentano (in valore assoluto) di una unita', mentre i positivi diminuiscono (sempre di una unita'), mentre nell'altra riga accade il contrario.

Ricapitolando, sono mosse lecite:

- Scegliere l'ordinamento delle righe e delle colonne
- Dato un quadratino 2×2 colorato nero-bianco/bianco-nero, cambiare colore a tutte le sue caselle

Voglio provare che, per mezzo di queste mosse, riesco a ricondurmi ad una classica colorazione a scacchiera. Lo farò per induzione, provandolo per ogni scacchiera $n \times n$, con n pari.

Il passo base, ossia $n = 2$, è ovvio. Si assuma quindi che se ho una scacchiera di lato $n - 2$ posso sempre, mediante mosse lecite, ricondurmi alla colorazione standard.

Per prima cosa tento di sistemare le prime due righe. In queste vi sarà un certo numero di rettangolini 2×1 colorati nero/bianco, e di conseguenza altrettanti colorati bianco/nero. Ordinando le colonne, li metto in alternanza partendo da sinistra. Ora, resta un certo numero di rettangolini tutti bianchi, ed altrettanti tutti neri. Li metto in alternanza nero-bianco. Considero ora una qualsiasi coppia di colonne avente nelle prime due righe un 2×2 nero-bianco/nero-bianco. In questa colonna deve esserci un 1×2 bianco-nero: ordinando le righe lo porto nella terza riga. A questo punto considerando il 2×2 della seconda e terza riga ho nero-bianco/bianco-nero: cambio colore a tutte le caselle. Il 2×2 delle prime due righe diventa quindi nero-bianco/bianco-nero. Iterando il procedimento, alla fine le prime due righe avranno colorazione a scacchiera.

Ripeto ora il procedimento per dare colorazione a scacchiera alle prime due colonne, facendo attenzione agli scambi di colonne: alla fine dovrò riportare tutte le altre alla situazione iniziale, per lasciare invariate le prime due righe.

Fatto ciò, mi resta una sottoscacchiera di lato $n - 2$ da sistemare, ma ciò è possibile per ipotesi induttiva.

Ho provato che, lasciando invariata la somma dei numeri, posso ricondurmi alla colorazione standard di una scacchiera: in questo caso nelle righe dispari i positivi superano in valore assoluto di 5 unità i negativi, mentre nelle righe pari vale il contrario. Pertanto la somma totale dei numeri è nulla.