

## VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale nazionale - 6 maggio 2006

Soluzioni

mod\_2

17 Aprile 2008

### 1. Una pausa di svago

Partiamo dal punto 1 verticale, e notiamo che i cubi inseribili in quelle 3 caselle sono: 125, 216, 343, 512, 729. Siccome nelle 3 caselle a destra dobbiamo inserire 3 numeri pari e i numeri pari da 1 a 9 sono 4 (2, 4, 6, 8) allora il numero 216 (che contiene 2 numeri pari) non può essere usato. Devono essere esclusi anche i numeri 343 (perché contiene 2 numeri uguali) e 729 (per il punto 3 orizzontale, dove la somma delle 3 cifre deve essere uguale a 9). Rimangono quindi i cubi 125 e 512. con un pò di casi a mano si può arrivare a concludere che 125 non va bene e 512 è il numero giusto. Adesso passiamo al punto 1 orizzontale, i quadrati di 3 cifre che cominciano con 5 sono solo 529 e 516, ma il primo è da scartare subito perché finisce con una cifra dispari. Al punto 3 orizzontale invece si nota subito che per fare 9 dobbiamo usare le cifre 3 e 4 (quelli rimasti erano 2, 4, 8, 9) e in particolare 4 va nella terza colonna 3. A questo punto la soluzione è immediata.

5	7	6
1	9	8
2	3	4

### 2. Rapporti burrascosi

Se facessimo corrispondere ogni squadra a una pallina e mettessimo le palline (case) alleate vicine, e un “-” tra due alleanze diverse, otterremo i seguenti casi:

- 1) ooooo
- 2) o-oooo
- 3) oo-ooo
- 4) o-oo-oo
- 5) o-o-ooo
- 6) ooo-oo
- 7) o-o-o-o-o

Non ci resta altro che contare in quanti modi possiamo disporre le case in ciascuno dei 7 casi e poi fare la somma di tutto.

- 1) Naturalmente c'è solo un modo per fare un'alleanza di 5 case con 5 case
  - 2) La casa che resta separata può essere scelta in 5 modi
  - 3) Le due case separate dal resto possono essere scelte in  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  modi (notare che, così come anche negli altri casi, contare in quanti modi scegliere il gruppo da 2 è uguale a contare in quanti modi scegliere il gruppo da 3, in pratica *modi di scegliere quelli che rimangono* = *modi di scegliere quelli che vanno via*)
  - 4) Il primo gruppo da 2 può essere scelto in  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  il secondo in  $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$  modi, ma tutto deve essere diviso per 2 perché è indipendente mettere prima un gruppo o l'altro  $\frac{10 \cdot 3}{2} = 15$ .
  - 5) Il gruppo da 3 può essere scelto in  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$  modi.
  - 6) Il gruppo da 2 può essere scelto in  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  modi.
  - 7) Naturalmente 1 modo solo per fare 5 alleanze con 5 case
- In totale  $1 + 5 + 10 + 15 + 10 + 10 + 1 = 52$

### 3. Questione di posizioni

I triangoli BEC e BDC sono rettangoli per costruzione per quindi possiamo calcolare BE e DE con il teorema di pitagora. La corda BD quindi è lunga

25. Scopriamo, a questo punto, che  $25^2 = (5\sqrt{5})^2 + (10\sqrt{5})^2$  cioè  $BD^2 = BC^2 + DC^2$  e quindi il triangolo BDC è rettangolo in C e BD è il diametro. Ora da C tracciamo il diametro CM e sia H l'intersezione di questo diametro con AD. CAM è quindi rettangolo per costruzione, e  $AM = \sqrt{CM^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - (10\sqrt{5})^2} = \sqrt{625 - 500} = 5\sqrt{5}$ . AMC e BDC sono quindi congruenti per il terzo criterio e AH è congruente a CE cioè 10. Di conseguenza AD è  $2 \cdot 10 = 20$  e il lato  $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15$

#### 4. Seduttore da strapazzo

(Soluzione di **Agi\_90**)

Pensiamo un po' a come potrebbero essere fatti i termini di quel mostro: ogni termine sarà il prodotto di un termine da ogni parentesi, tutte le possibili scelte faranno tutti i termini, ovviamente poi potremo sommare quelli simili, noi vogliamo quelli in cui compare la  $x^{2006}$ . Dopo aver sviluppato le potenze notiamo che i termini in  $x^{1024}$ ,  $x^{512}$ ,  $x^{256}$  e almeno uno dei due termini in  $x^{128}$ , dovrà essere preso per forza (moltiplicando infatti tutti i termini con esponente massimo nelle altre parentesi non riusciamo a raggiungere  $x^{2006}$ ). Bene li eliminiamo momentaneamente e consideriamo che dobbiamo raggiungere  $2006 - 1024 - 512 - 256 - 128 = 86$ . Ottimo, ma questo non è un grande problema:

$$(1 + 2x + x^2)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + 3x^8 + 3x^{16} + x^{24})(1 + x^{16})(x^{128} + 4x^{96} + 6x^{64} + 4x^{32} + 1)(1 + x^{64})(1 + x^{128})$$

consideriamo di prendere il primo  $x^{128}$  da destra. Possiamo ottenere  $x^{86}$  con:

$$x^{128} \cdot x^{64} \cdot 3x^{16} \cdot x^4 \cdot x^2 \text{ (per 2 visto che ci sono due } x^2 \text{)}$$

$$x^{128} \cdot 6x^{64} \cdot 3x^{16} \cdot x^4 \cdot x^2 \text{ (sempre per 2)}$$

$$x^{128} \cdot 6x^{64} \cdot x^{16} \cdot x^4 \cdot x^2 \text{ (per 2)}$$

$$x^{128} \cdot x^{64} \cdot 3x^{16} \cdot x^4 \cdot x^2 \text{ (indovinate? per due XD)}$$

e poi considerando il secondo  $x^{128}$ :

$$x^{128} \cdot x^{64} \cdot 3x^{16} \cdot x^4 \cdot x^2 \text{ (al solito per 2)}$$

$$x^{128} \cdot x^{64} \cdot 3x^{16} \cdot x^4 \cdot x^2 \text{ (sempre per due XD)}$$

$$\text{in totale saranno: } (6 + 36 + 12 + 2 + 2 + 6)x^{2006} = 64x^{2006}$$

(Soluzione di **darkcrystal**)

Raccolgo  $q(x) = (1 + x)(1 + x^8)^2(1 + x^{32})^3$ . Quello che resta, lo moltiplico e divido per  $(1 - x)$  e scopro che viene  $p(x) = \frac{1 - x^{2048}}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^{2047}$ .

Allora, dato che in questo ultimo polinomio TUTTI i termini compaiono con coefficiente 1, e ci sono TUTTI gli esponenti, ogni termine nell'espansione di  $q(x)$  potrà essere associato ad un termine nell'espansione di  $p(x)$  in modo che il prodotto abbia esponente 2006, e il coefficiente sia lo stesso del termine preso da  $q(x)$ . Ma allora si tratta solo di contare qual è la somma dei coefficienti di  $q(x)$ , cioè  $q(1)$ ! E infatti  $q(1) = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^6 = 64$ .

#### 5. Alla lezione di pozioni

#### 6. Un espediente truffaldino

La risposta è quello di disporre 1 opposto al 2, 3 opposto al 4 e 5 opposto al 6, ma non riesco a formalizzarlo...

#### 7. Potenza magica

Facendo i casi piccoli a mano si nota che

$$11 \longrightarrow 1 + 1 = 2 \longrightarrow 2^2 = 4$$

$$4 \longrightarrow 4^2 = 16$$

$$16 \longrightarrow 1 + 6 = 7 \longrightarrow 7^2 = 49$$

$$49 \longrightarrow 4 + 9 = 13 \longrightarrow 13^2 = 169$$

$$169 \longrightarrow 1 + 6 + 9 = 16 \longrightarrow 16^2 = 256$$

$$256 \longrightarrow 2 + 5 + 6 = 13 \longrightarrow 13^2 = 169$$

Si ritorna al 169, e quindi 169 e 256 si ripetono alternamente. Siccome 2006 è un numero pari allora 169 è la soluzione

## 8. La parola d'ordine

Il numero dei divisori di un numero  $n$

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

è pari a  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$

Scomponiamo ora 63 che è uguale a  $3 \cdot 3 \cdot 7$

Il primo 3 può esser uguagliato alla potenza di 73 del numero cercato che moltiplicato per 2 e sommato a 1 fa effettivamente 3.

Passiamo al restante 3 e 7 (senza elevare al quadrato quindi le potenze dei numeri che vanno a moltiplicare 73 sono 1 e 3), e notiamo che affinché il numero cercato sia minimo allora dobbiamo moltiplicare al 73 i numeri più piccoli possibili diversi naturalmente da 1, in particolare  $73 \cdot 3 \cdot 2^3 = 1752$

## 9. Alla lezione di manufatti geometrici

1) Con il solito ragionamento

*la prima faccia ha a disposizione 6 colori fra i quali scegliere, la seconda 5 ecc....*

otteniamo  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$  modi

Ma ricordiamo da a partire da una configurazione è possibile ottenere altre 7 semplicemente ruotando il prisma in modo orizzontale e verticale, e quindi tutto va diviso per 8

$$720 : 8 = 90$$

2) Il giallo ha a disposizione solo 2 facce, mentre gli altri seguono la stessa regola del *il primo 5 facce a disposizione, il secondo 4 ecc...*

$$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 240$$

Tutto naturalmente diviso per 8 per lo stesso ragionamento di prima

$$240 : 8 = 30$$

La soluzione del problema è quindi 9030

## 10. La pianta del castello

Si nota che che la parte della circonferenza di ogni cerchio da contare è esattamente  $\frac{1}{3}$  del totale. In tutto ci sono 6 circonferenze e quindi  $\frac{100 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \pi}{3} = 400\pi$ . La soluzione è chiaramente 400.

## 11. Giochi pericolosi

Per ottenere il massimo, devono essere al minimo i casi in cui a destra di un Rapportaureo ci sia un Partimmagria, e al massimo i casi in cui a destra di un Rapportaureo c'è sempre un Rapportaureo, e a destra di un Partimmagria un Partimmagria. Questa disposizione di posti si ottiene disponendo tutti i Rapportaureo uno accanto all'altro occupando così la semicirconferenza e tutti i Partimmagria nell'altra metà. In questo caso il rapportaureo che ha alla sua destra un Partimmagria non può più scrivere "*Il mio vicino di destra è di Rapportaureo*" neanche il Partimmagria che ha alla sua destra un Rapportaureo. Il numero massimo dei fogli è quindi uguale a  $1000 - 2 = 9998$

## 12. Uno schema di Quamitch

(Soluzione di *Cassa*)

I cubi possibili in questo spazio sono quelli aventi lato compreso tra 1 e 10, precisamente:

$$10^3 = 1000 \text{ di lato } 1$$

$$9^3 = 729 \text{ di lato } 2$$

$$8^3 = 512 \text{ di lato } 3$$

$$7^3 = 343 \text{ di lato } 4$$

$$6^3 = 216 \text{ di lato } 5$$

$$5^3 = 125 \text{ di lato } 6$$

$$4^3 = 64 \text{ di lato } 7$$

$$3^3 = 27 \text{ di lato } 8$$

$$2^3 = 8 \text{ di lato } 9$$

$$1 \text{ di lato } 10$$

Si sommano tutti e si ottiene 3025.

## 13. Alla lezione di divinazione

(Soluzione di *Sesshoumaru*)

Innanzitutto, possiamo utilizzare solamente i numeri 2, 22 o 222. Facendo il prodotto viene fuori 9768, che potrebbe già andarci bene. Dimostriamo che è proprio quello che cerchiamo.

a) Immaginiamo di non voler usare nessun 222: allora potremo al massimo usare due volte 22 (perchè  $22^3$  fa già 10648). Dunque abbiamo 484, che moltiplicato per  $2^4$  ci dà al massimo 7744. Scartato. Se invece usiamo solo un 22, possiamo moltiplicarlo al massimo per  $2^8$ , che ci regala uno scarso 5632.

b) Immaginiamo di non usare nessun 22. Possiamo usare sempre solo un 222, che moltiplicato al massimo per  $2^5$  ci dà 7104. Scartato anche questo. Abbiamo poi il caso  $222 \cdot 2^2 = 888$ , ovviamente da scartare.

c) Se non usiamo nessun 2, abbiamo al massimo  $22 \times 222 = 4884$ .

Dunque dobbiamo usare per forza tutti e tre, ottenendo 9768.

(Soluzione di *Cassa*)

I fattori possibili sono 2222 222 22 e 2 ed eventuali potenze. Quindi i vari prodotti che non superano 9999 con i rispettivi fattori sono

$$2222 \cdot 4 = 8888$$

$$222 \cdot 32 = 7104$$

$$222 \cdot 22 \cdot 2 = 9768$$

$$22 \cdot 22 \cdot 16 = 7744$$

$$22 \cdot 256 = 5632$$

Di conseguenza il prodotto massimo possibile è 9768.

#### 14. Difesa contro la matemagia oscura

(Soluzione di *Cassa*)

Gli angoli interni del dodecagono sono di  $180 - \frac{360}{12} = 150$ . Tracciando un diametro otteniamo un triangolo formato da un lato, una corda, e il diametro stesso avente angoli di  $75^\circ$   $15^\circ$  e  $90^\circ$  (triangolo retto iscritto in semicirconferenza). La corda avrà quindi lunghezza  $l \cdot \tan 75^\circ = l(2 + \sqrt{3})$ . I 3 triangoli più piccoli saranno quindi equilateri ( $150^\circ$ - $90^\circ$ ) e avranno area totale pari a  $3 \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$  mentre il lato del triangolo centrale sarà  $\sqrt{3}l$  e l'area  $3 \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$  di conseguenza il loro rapporto sarà 1. (Il risultato va poi moltiplicato per 1000)

#### 15. Un manufatto magico di inusitata potenza

Chiamiamo il quadrato centrale  $a$  si deduce subito (usando l'equazione) che la casella in basso a destra è  $a+5$  e quindi la seconda casella della terza colonna è 26, ora la seconda casella della prima colonna è 38, e la prima casella della prima colonna è  $a-5$ . Ora impostiamo l'equazione

$$38 + a + 26 = (a - 5) + a + (a + 5) \implies 64 = 2a \implies a = 32 \implies 3a = 96$$

#### 16. Matricole ambiziose

La risoluzione di questo problema non è altro che l'applicazione del principio di inclusione ed esclusione.

La somma dei numeri dispari da 1 a  $n$  è uguale a  $(\frac{n+1}{2})^2$

Notiamo che il numeratore  $a$  non può essere maggiore di 300 nè minore di 1 (per le condizioni poste nella domanda). Scomponiamo il denominatore  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  e quindi il numeratore non può essere nè multiplo di 2, nè di 3 nè di 5 altrimenti si potrebbe ancora semplificare.

Dai 300 numeri di partenza togliamo dunque già i numeri pari. La somma dei numeri dispari rimasti è uguale a

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 299 = 150^2 = 22500$$

Ora facciamo la somma dei multipli di 3

$$3 + 9 + 15 + 21 + \dots + 297 = 3(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99) = 3 \cdot 50^2 = 7500$$

I multipli di 5 sono

$$5 + 15 + 25 + 35 + \dots + 295 = 5(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 59) = 5 \cdot 30^2 = 4500$$

In fine contiamo i multipli di 15 ( $3 \cdot 5$ ) che sono stati contati due volte

$$15 + 45 + 75 + \dots + 285 = 15(1 + 3 + 5 + \dots + 19) = 15 \cdot 10^2 = 1500$$

La somma dei numeratori è quindi uguale a

$$22500 - 7500 - 4500 + 1500 = 12000$$

Diviso per 30 che è il denominatore  
 $12000:30=400$

### 17. Una condanna da evitare

L'intero più grande che soddisfa la condizione è 123456789, di 9 cifre.

Inoltre notiamo che lo 0 non può essere usato.

Quelli di 8 cifre possono essere ottenuti cancellando una cifra da quella di 9 cifre, quelli di 7 cifre cancellando 2 da quello di 9, quelli di 6 cifre cancellandone 3 e così via...

Il problema si trasforma quindi in *quanti modi posso scegliere quelli da cancellare?*

-9 cifre: 1 modo

-8 cifre: quello da cancellare può essere scelto in 9 modi possibili

-7 cifre:  $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

-6 cifre:  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$

-5 cifre:  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$

-4 cifre: 126 (simmetrico di 5 cifre)

-3 cifre: 84 (caso simmetrico di 6 cifre)

-2 cifre: caso simmetrico di 7 cifre e quindi 36

In totale  $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 = 502$

### 18. Matricole allo sbando

Notiamo che un numero per essere pari, la sua ultima cifra deve finire in 0 o 2 o 4 o 6 o 8.

Nel caso in cui la cifra delle migliaia è 4, logicamente abbiamo solo più 4 possibilità per l'ultima cifra (0, 2, 6, 8). Una volta fissate la prima e l'ultima cifra, per la cifra delle centinaia abbiamo  $10 - 2 = 8$  possibilità e 7 per quella delle decine. Nel caso in cui la cifra delle migliaia è 4 abbiamo in totale  $4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$  numeri che soddisfano le proprietà richieste.

Per il caso in cui la cifra delle migliaia è 5, il ragionamento è lo stesso cambia solo che la cifra delle decine lo possiamo scegliere in 5 modi e quindi  $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$

Per il caso in cui la cifra delle migliaia è 6, che è pari, i numeri che ci servono sono sempre 224.

In totale abbiamo  $224 + 224 + 280 = 728$

### 19. L'odioso Fracto

Troviamo le disposizioni possibili: la prima persona può scegliere il suo posto in 10 modi diversi, il secondo in 9, il terzo in 8 ecc... E quindi le disposizioni possibili sono:  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Adesso troviamo le disposizioni favorevoli. Notiamo che il primo ha sempre 10 possibilità, il secondo invece ha solo 8 possibilità perché il posto davanti o dopo (a seconda di dove si è seduto il primo) non può essere più occupato, il terzo quindi ha 6 possibilità e il quarto 4 possibilità. In totale  $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 1920$

Facciamo ora casi favorevoli diviso casi possibili ( $\frac{8}{21}$ ) sommando il numeratore con il denominatore otteniamo 29.

### 20. Impostori svelati

L'angolo  $\widehat{BAC} = 52^\circ$ , gli angoli  $\widehat{BAE}$  e  $\widehat{EAC}$  sono congruenti perché insistono sullo stesso arco e hanno ampiezza  $26^\circ$  ciascuno. Essendo  $\widehat{EAD}$  retto perché ED è un diametro per costruzione, l'angolo  $\widehat{CAD} = 90 - 26 = 64^\circ$ . ABCD è un quadrilatero inscritto per costruzione e quindi l'angolo  $\widehat{ADC} = 180 - 75 = 105^\circ$ . L'angolo  $\widehat{ACD} = 180 - 105 - 64 = 11^\circ$ , ma quest'angolo è anche congruente a  $\widehat{AED}$  perché insistono sullo stesso arco e quindi anche  $\widehat{AED} = 11^\circ$  per la proprietà transitiva delle uguaglianze.