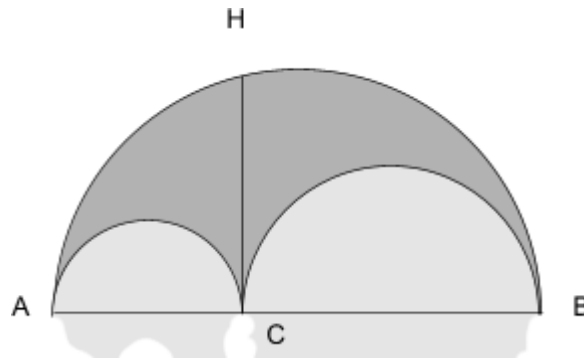


Cesenatico 1993

1

Calcolare l'area della regione colorata delimitata dai tre semicerchi di diametri AB , BC , AC sapendo che il segmento CH è lungo $\sqrt{3}$ dove H è il punto del semicerchio di diametro AB la cui proiezione ortogonale sul diametro è C .



Soluzione

Indichiamo con $\gamma_{AC}, \gamma_{CB}, \gamma_{AB}$ rispettivamente le circonferenze di diametri AC, CB, AB e con $[W]$ l'area della superficie W .

Siano $AB = 2a, AC = x, BC = y$

Allora, osservando le relazioni tra l'altezza CH e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, e tra le proiezioni e la stessa ipotenusa, risolviamo il sistema nelle due incognite x, y per poter esprimerli in funzione di a :

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = 3 \end{cases}$$

Se $x < y$ la soluzione è:

$$x = a - \sqrt{a^2 - 3}, y = a + \sqrt{a^2 - 3}$$

n.b. $a \geq \sqrt{3}$

$$\left[\frac{\gamma_{AC}}{2} \right] = \frac{\pi}{8}(2a^2 - 3 - 2a\sqrt{a^2 - 3}), \left[\frac{\gamma_{CB}}{2} \right] = \frac{\pi}{8}(2a^2 - 3 + 2a\sqrt{a^2 - 3}), \left[\frac{\gamma_{AB}}{2} \right] = \frac{\pi}{2}a^2$$

L'area della superficie S che cerchiamo è data da:

$$\left[\frac{\gamma_{AB}}{2} \right] - \left(\left[\frac{\gamma_{AC}}{2} \right] + \left[\frac{\gamma_{CB}}{2} \right] \right) = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\pi}{8}(4a^2 - 6) \rightarrow \boxed{S = \frac{3\pi}{4}}$$

2

Trovare tutte le coppie p, q di primi (positivi) tali che $5x^2 - px + q$ abbia soluzioni razionali distinte.

Soluzione 1

Se $5x^2 - px + q = 0$ ammette soluzioni razionali è fattorizzabile sugli interi. Essendo $5, q$ primi, le seguenti sono tutte e le sole fattorizzazioni:

$$(5x - q)(x - 1) = 0 \quad (1), \quad (5x + q)(x + 1) = 0 \quad (2)$$

$$(5x - 1)(x - q) = 0 \quad (3), \quad (5x + 1)(x + q) = 0 \quad (4)$$

Sfruttando il fatto che il termine di grado 1 in x ha coefficiente $-p$, analizziamo i vari casi.

(1) $-(q + 5) = -p \rightarrow p - q = 5$. Allora uno dei due, tra p e q dovrà essere pari. Evidentemente sarà $q = 2$, dunque abbiamo la soluzione $(7, 2)$

(2) $q + 5 = -p$ che non dà soluzioni, essendo p, q positivi.

(3) $-5q - 1 = -p$ poichè è assurdo supporre che siano entrambi pari/dispari, uno dei due dovrà esser pari, cioè 2 essendo p, q primi. Si ha come soluzione $(11, 2)$

(4) $1 + 5q = -p$ che non dà soluzioni, essendo p, q positivi.

Controlliamo se le soluzioni trovate verificano effettivamente le ipotesi:

$(7, 2)$: $5x^2 - 7x + 2 = (5x - 2)(x - 1)$ che dà soluzioni razionali distinte;

$(11, 2)$: $5x^2 - 11x + 2 = (5x - 1)(x - 2)$ che dà soluzioni razionali distinte.

Soluzione 2

$$\Delta = p^2 - 20q$$

Siccome le soluzioni devono essere razionali $\sqrt{\Delta} \in \mathbf{Q}$.

Cioè $p^2 - 20q = n^2$, con $n \in \mathbf{N}$ che possiamo meglio riscrivere come:

$$(p - n)(p + n) = 20q$$

Ora, essendo q primo ci ricaviamo facilmente le fattorizzazioni a due di $20q$:

$$\{1, 20q\}, \{2, 10q\}, \{4, 5q\}, \{5, 4q\}, \{10, 2q\}, \{20, q\}$$

Sapendo che $p + n > p - n$ evitiamo di fare alcuni casi:

$$20q > 1$$

$$\begin{cases} p - n = 1 \\ p + n = 20q \end{cases} \rightarrow 2p - 20q = 1 \rightarrow \text{assurdo perchè } 2 \nmid 1$$

$$10q > 2$$

$$\begin{cases} p - n = 2 \\ p + n = 10q \end{cases} \rightarrow p - 5q = 1 \rightarrow \text{uno tra } p \text{ e } q \text{ deve essere pari} \rightarrow \boxed{(11, 2)}$$

$$5q > 4$$

$$\begin{cases} p - n = 4 \\ p + n = 5q \end{cases} \rightarrow 2p - 4 = 5q \rightarrow 2 \mid q \rightarrow \boxed{(7, 2)}$$

$$5 < 4q$$

$$\begin{cases} p - n = 5 \\ p + n = 4q \end{cases} \rightarrow 2p - 4q = 5 \rightarrow \text{assurdo perchè } 2 \nmid 5$$

$$\{10, 2q\}$$

$$\begin{cases} p - n = 10 \\ p + n = 2q \end{cases} \rightarrow p - q = 5 \text{ Non possono essere entrambi dispari e deve essere}$$

$$p > q \rightarrow \boxed{(7, 2)}$$

(La soluzione però non è accettabile in questo caso perchè risulta n negativo. Notare che ottengo la stessa coppia ponendo $p - n = 2q, p + n = 10$, e questa volta la soluzione è accettabile.)

$\{20, q\}$

$$\begin{cases} p - n = 20 \\ p + n = q \end{cases} \rightarrow 2p - 20 = q \rightarrow 2|q \rightarrow \boxed{(11, 2)}$$

(Anche in questo caso la soluzione non risulta accettabile perchè darebbe n negativo.
Ponendo $p - n = q, p + n = 20$ ottengo la stessa soluzione, questa volta accettabile.)

3

È data una scacchiera infinita, le cui righe e le cui colonne sono numerate con i numeri positivi. In ogni casella della scacchiera si può collocare al più un gettone (si hanno a disposizione infiniti gettoni). Sono date due successioni a_1, a_2, \dots e b_1, b_2, \dots di numeri interi positivi. Dimostrare che si possono disporre i gettoni sulla scacchiera in modo che vi siano a_1 gettoni sulla prima riga, a_2 gettoni sulla seconda riga, \dots , b_1 gettoni sulla prima colonna, b_2 gettoni sulla seconda colonna, \dots .

Soluzione

Diamo una soluzione costruttiva, mostrando quindi l'esistenza di un modo per disporre i gettoni come richiesto. Vogliamo disporre gli a_1 gettoni sulla prima riga. Non essendo occupata nessuna casella, posso disporli a piacere.

Vado ora a considerare la prima colonna. Ho tutte le caselle libere, meno la prima (quella d'intersezione con la prima riga), su cui non posso mettere gettoni. Ho due casi, o non occorre mettere altri gettoni per ottenere b_1 , cioè il caso in cui sia $b_1 = 1$ e la casella $(1, 1)$ sia già occupata da uno degli a_1 gettoni, o ne ho ancora da mettere e li dispongo nuovamente a piacere.

A questo punto sono sicura che qualunque sia la sua configurazione, non dovrò più modificare la casella $(1, 1)$ comune alla prima riga e alla prima colonna. Posso segnare graficamente questa cosa con una X sulla casella interessata.

Volendo sistemare la seconda riga, riconosco una situazione analoga a quella della prima colonna. Mi si presentano di nuovo due casi. Dopo che avrò sistemato con lo stesso criterio questa riga, passo alla seconda colonna.

Per la seconda colonna potrei avere qualche problema in più dato dal fatto che potrebbero essere due le caselle occupate, e potrei avere invece $b_2 = 1$. In questo caso devo necessariamente spostare un gettone della prima o della seconda riga nella colonna successiva, o nella prima libera.

Quando avrò concluso di sistemare la seconda colonna, ho 4 caselle da marcare con una X che corrispondono alle intersezioni tra le righe e colonne considerate.

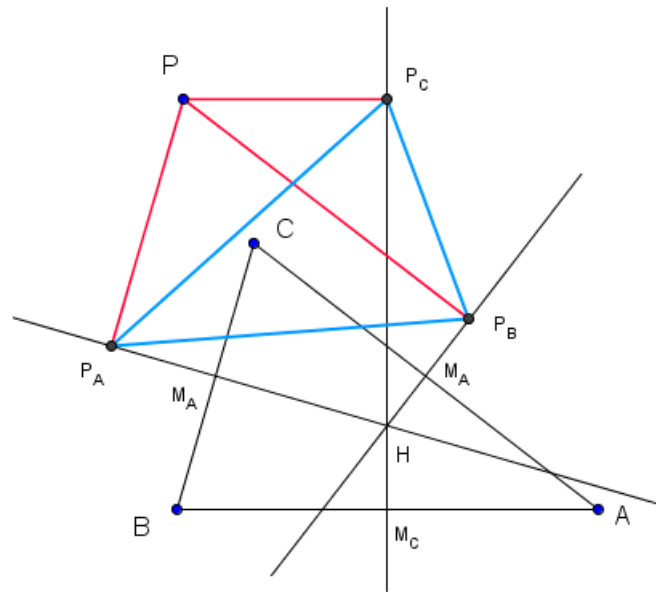
Generalizziamo il risultato. Ammettiamo di aver sistemato i gettoni fino all' n -esima riga/colonna. Le caselle che sono sistemate sono quelle del quadrato di vertici $(1, 1), (n, 1), (n, n), (1, n)$. Vado a considerare la riga $n + 1$. Se non ci sono ancora a_{n+1} gettoni sulla riga, li aggiungo, nelle caselle che voglio, a partire dalla $(n + 1, n + 1)$ spostandomi verso destra. Se invece ce ne sono esattamente a_{n+1} non modifico la configurazione della riga. Se ne ho invece più di a_{n+1} devo necessariamente togliere quelle in eccedenza facendo sì che ogni gettone che spostato rimanga nella stessa colonna (che avevo già sistemato in quanto a numero di gettoni presenti), spostandolo verso la prima riga libera in basso, che invece devo ancora sistemare come numero di gettoni. Ho quindi sistemato la riga $n + 1$. Ripeto lo stesso procedimento per la colonna $n + 1$. Alla fine, marco le restanti caselle del quadrato di lato $(n + 1)$ che ha un vertice in $(1, 1)$ e vado avanti a sistemare le altre righe/colonne.

E' da notare che troverò prima o poi una riga o colonna in cui poter lasciare i gettoni in eccedenza, sfruttando l'ipotesi di una scacchiera infinita. Sempre per ipotesi infatti non posso infatti avere una successione con $a_i = 0, 0 < i \leq n$.

4

Sia ABC un triangolo e P un punto del piano. Chiamiamo P_A, P_B, P_C le proiezioni di P rispettivamente sui tre assi del triangolo. Si dimostri che il triangolo $P_AP_BP_C$ è simile al triangolo ABC . (Si consideri per semplicità solo il caso in cui il punto P giace nell'angolo $\angle M_A H M_B$, essendo M_A, M_B i punti medi dei lati BC e AC e H il punto di intersezione degli assi.)

Soluzione



Sia T nella costruzione un punto appartenente al prolungamento della retta di PP_A tale che $PT < P_AT$.

I triangoli PHP_B, PHP_C sono inscrittibili in una circonferenza di diametro PH , dunque il quadrilatero PP_CP_BH è inscrittibile.

Notiamo però che anche il quadrilatero PP_BHP_A è inscrittibile, in quanto $\widehat{PP_BH} = \widehat{PP_AH} = 90$ per ipotesi.

Poichè per 3 punti passa una sola circonferenza, P, P_C, P_B, H, P_A appartengono alla stessa circonferenza.

Dalle ipotesi abbiamo che

$$PP_C \perp P_CM_C, P_CM_C \perp AB \Rightarrow PP_C \parallel AB$$

Allo stesso modo si dimostra

$$PP_B \parallel AC, PP_A \parallel BC$$

Considerando i parallelismi due a due abbiamo:

$$PP_A \parallel BC, PP_B \parallel AC \Rightarrow \widehat{P_A P P_B} = \widehat{BCA}$$

$$PP_B \parallel AC, PP_C \parallel AB \Rightarrow \widehat{P_C P P_B} = \widehat{CAB}$$

$$PP_C \parallel AB, PP_A \parallel BC \Rightarrow \widehat{P_C P P_A} = \widehat{CBA}$$

Andiamo quindi a considerare gli angoli uguali, sfruttando la ciclicità di $P_C P P_A H P_B$:

$$\widehat{P_A P_C P_B} = \widehat{P_A P P_B} = \widehat{BCA}$$

$$\widehat{P_C P_A P_B} = \widehat{P_C P P_B} = \widehat{CAB}$$

$$\widehat{P_C P_B P_A} = 180 - \widehat{P_C P P_A} = \widehat{P_C P P_C} = \widehat{CBA}$$

Avendo tre angoli congruenti (ne bastavano due ordinati), $P_A P_B P_C$ è simile a ABC .

5

Siano a, b, c tre numeri reali, positivi e inferiori a 1. Si dimostri che vale la seguente disuguaglianza:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$$

Soluzione 1

La disuguaglianza è ciclica. Supponiamo, senza perdita di generalità $a \geq b, c$. Riscriviamo come:

$$a^2 - 1 - \boxed{a^2b} + b^2 + c^2 - c^2a - b^2c \leq 0$$

Essendo $a \geq b \Rightarrow -a \leq -b \Rightarrow -a^2b \leq -ab^2$.

Dunque dobbiamo verificare che:

$$\begin{aligned} a^2 - 1 - \boxed{ab^2} + b^2 + c^2 - c^2a - b^2c &\leq 0 \\ (a-1)(a+1) - b^2(a-1) + c^2(1-a) - b^2c &\leq 0 \\ (a-1)(a+1-b^2-c^2) - b^2c &\leq 0 \end{aligned}$$

che è vera. Infatti:

$$a-1 < 0$$

e

$$a+1-b^2-c^2 > 0$$

perchè $a-b^2 > a-b > 0$ e $1-c^2 > 1-c > 0$ nelle ipotesi che siano $0 < a, b, c < 1$.

Notare che vale la disuguaglianza stretta.

Soluzione 2

Scriviamo la disuguaglianza come:

$a^2 + b^2 + c^2 - a^2b - b^2c - c^2a - 1 \leq 0$ notando che:

$$LHS = (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) - a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b - b^2c - c^2a \leq 0$$

$$(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) + a^2b(b-1) + b^2c(c-1) + c^2a(a-1) - a^2b^2c^2 \leq 0 (*)$$

Ora poichè $0 < a, b, c < 1 \rightarrow$ si ha che

$$a-1, b-1, c-1 < 0$$

$$a^2-1, b^2-1, c^2-1 < 0$$

$$a^2b^2c^2 > 0$$

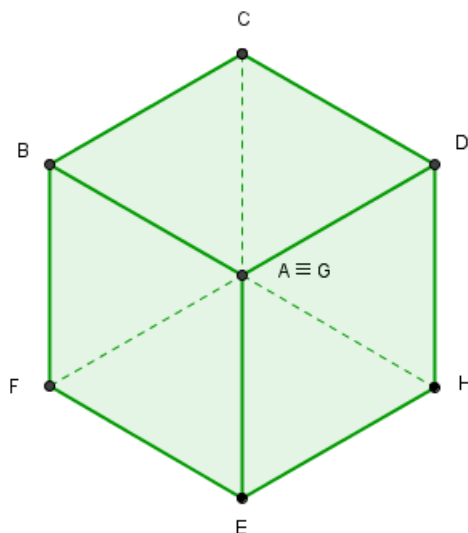
Dunque il LHS della (*) risulta formato da termini tutti negativi, e la disuguaglianza è verificata.

6

Sia C un cubo di lato 1 e lo si ruoti di 60° intorno ad una sua diagonale ottenendo così un cubo C' . Si determini il volume del solido di intersezione di C e C' .

Soluzione

Dobbiamo vedere quali punti rimangono in C in seguito alla rotazione. Facciamo



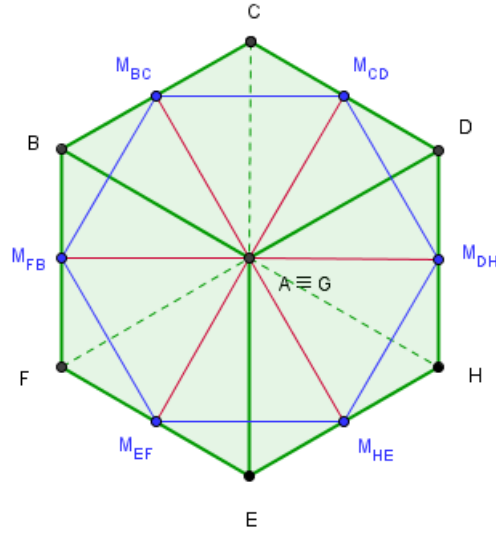
qualche osservazione sui segmenti, per determinare la forma del solido di intersezione. Poiché evidentemente C e C' non coincidono, dovranno avere qualche intersezione, avendo lo stesso volume ed essendo i punti A, G come indicato in figura, i punti fissi. Osserviamo cosa succede ai segmenti dopo la rotazione, e in particolare quali punti dei segmenti ruotati sono ancora individuabili sul cubo di partenza. Dei segmenti CG, FG, HG si mantiene fisso il punto G . Allo stesso modo, dei segmenti AB, AD, AE rimane fisso il punto A . Inoltre poiché dai punti A, G in C' partono spigoli della stessa lunghezza che in C non ci saranno altre intersezioni tra C, C' sugli spigoli contenenti A, G .

Siccome una rotazione di 120° lascia invariato il tutto, con una rotazione di 60° si dovrà mantenere una qualche simmetria nelle intersezioni (1).

Osserviamo un fatto interessante. Prendiamo il punto medio di ciascuno dei segmenti: BC, CD, DH, HE, EF, FB .

M_{CD} si trova nello spazio, in una posizione rispetto a G che è uguale a quella di M_{EF} rispetto a A . Il segmento $M_{CD}M_{EF}$ passa per il punto medio di AG . La stessa cosa vale per i segmenti $M_{BC}M_{HE}$ e $M_{DH}M_{FB}$. Chiamiamo O il centro del cubo, attraverso cui passano questi segmenti. Calcoliamo $M_{BC}O$. Poiché $M_{BC}O \perp AG$ si ha che:

$$(M_{BC}O)^2 + \frac{1}{4}(AG)^2 = (M_{BC}A)^2$$



Sempre per Pitagora, si ricava che

$$M_{BC}A = \frac{\sqrt{5}}{2}, AG = \sqrt{3}$$

Allora

$$M_{BC}O = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per evidenti simmetrie di $M_{BC}OM_{CD}$ rispetto a OC si ha che

$$M_{BC}O = M_{CD}O = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si ottiene inoltre, per Pitagora sul triangolo $M_{BC}CM_{CD}$:

$$M_{BC}M_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Allora il triangolo $M_{BC}OM_{CD}$ e' equilatero. Altrettanto si puo' dire per tutti i 6 triangoli che hanno i vertici in due punti medi consecutivi e in O . In particolare gli angoli in O sono di 60. Da questo fatto, oltre che l'uguaglianza di $M_{BC}M_{CD}, M_{CD}M_{DH} \dots M_{FB}M_{BC}$ si deduce che $M_{BC}M_{CD}M_{DH}M_{HE}M_{EF}M_{FB}$ e' un esagono, contenuto in un piano perpendicolare a AG . La rotazione di 60 manda allora ogni vertice dell'esagono nel suo consecutivo.

Supponiamo ci siano altre intersezioni tra gli spigoli di C e C' .

Se ci fossero due intersezioni su ciascun spigolo, essendo una di queste nel punto medio, non si mancherebbe la simmetria (1) con l'altra intersezione.

Supponiamo allora che le intersezioni siano tre. Dovrebbero esserci quindi tre segmenti che intersecano uno stesso. Ma la situazione non risulta verosimile in quanto i punti A e G vincolano 6 dei 12 spigoli nella rotazione.

Dunque il solido di intersezione risulta essere formato dalle piramidi che hanno per base l'esagono $M_{BC}M_{CD}M_{DH}M_{HE}M_{EF}M_{FB}$ e per vertici A e G .

L'area di base dell'esagono e' data da

$$6A_{[M_{BC}OM_{CD}]} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}(M_{BC}M_{CD})^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{4}$$

La lunghezza della diagonale e'

$$AG = \sqrt{3}$$

Il volume della doppia piramide, cioe' dell'intersezione tra C e C' e'

$$\boxed{\frac{3}{4}}$$