

0.1 Coniche

In questo paragrafo vogliamo mostrare come passare dalla forma cartesiana a quella polare per le tre coniche non degeneri: ellisse, parabola, iperbole.

0.1.1 Ellisse: forma cartesiana

Ricordiamo la definizione

Il luogo dei punti del piano aventi somma delle distanze da due punti fissi (detti fuochi) costante

Troviamo la forma cartesiana dell'ellisse in un sistema di riferimento che ha origine nel punto medio tra i due fuochi, e asse x sulla retta passante per i due fuochi. Chiamiamo c la distanza dei due fuochi dall'origine, quindi un fuoco avrà coordinate $(c; 0)$ e l'altro $(-c; 0)$.

Scriviamo dunque la condizione che deve soddisfare un punto $P = (x; y)$ per appartenere all'ellisse.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

dove a , come è facile verificare, rappresenta proprio la lunghezza del semiasse maggiore.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ x^2 + c^2 - 2xc + y^2 &= 4a^2 + x^2 + c^2 + 2xc + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4xc\end{aligned}$$

dividiamo tale equazione per 4, ed eleviamo al quadrato

$$\begin{aligned}a^2(x^2 + c^2 + 2xc + y^2) &= a^4 + x^2c^2 + 2xca^2 \\ a^2x^2 + a^2c^2 + 2xca^2 + a^2y^2 &= x^2c^2 + a^4 + 2xca^2 \\ x^2(a^2 - c^2) + y^2(a^2) &= a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

Poniamo ora $a^2 - c^2 = b^2$; osserviamo che b rappresenta la lunghezza del semiasse minore: se prendiamo il punto sull'ellisse che ha uguale distanza dai due fuochi, il triangolo che ha estremi in quel punto, nell'origine e in uno dei due fuochi è rettangolo, ed ha ipotenusa di lunghezza a ed un cateto di lunghezza c .

Arriviamo quindi alla forma

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

cioè alla ben nota equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

0.1.2 Ellisse: forma polare

Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma polare, vuol dire trovare la relazione tra r e θ , dove r è la distanza di un punto da un fuoco (supponiamo quello di coordinate $(c; 0)$, e θ è l'angolo formato dal vettore \mathbf{r} con una certa direzione fissata. Osserviamo che, il fatto di riferire l'espressione ad un particolare fuoco, fa perdere la simmetria dell'equazione in forma cartesiana. Partiamo dall'equazione (1). Dobbiamo scrivere le coordinate di un punto $P = (r; \theta)$ nel sistema cartesiano:

$$\begin{cases} x = c + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Sostituiamo tali espressioni nella (1)

$$\begin{aligned} \frac{c^2 + r^2 \cos^2 \theta + 2cr \cos \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} &= 1 \\ b^2 c^2 + b^2 r^2 \cos^2 \theta + 2b^2 cr \cos \theta + a^2 r^2 - a^2 r^2 \cos^2 \theta &= a^2 b^2 \\ (b^2 - a^2) r^2 \cos^2 \theta + 2b^2 cr \cos \theta + a^2 r^2 + b^2 (c^2 - a^2) &= 0 \\ -c^2 r^2 \cos^2 \theta + 2b^2 cr \cos \theta + a^2 r^2 - b^4 &= 0 \\ a^2 r^2 - (r^2 c^2 \cos^2 \theta - 2b^2 cr \cos \theta + b^4) &= 0 \\ (r^2 c^2 \cos^2 \theta - 2b^2 cr \cos \theta + b^4) &= a^2 r^2 \\ b^2 - cr \cos \theta &= ar \\ r(a + c \cos \theta) &= b^2 \end{aligned}$$

Se, per concludere, poniamo $\frac{c}{a} = e$ e $\frac{b^2}{a} = l$ otteniamo

$$r(1 + e \cos \theta) = l \quad (2)$$

che è proprio l'equazione dell'ellisse in coordinate polari.

Prima di concludere, osserviamo che $0 < e < 1$, dal momento che $0 < c < a$ in un'ellisse. Ciò vuol dire che il fattore $1 + e \cos \theta$, non si annulla mai (cosa che in realtà ci aspettavamo), e quindi, per ogni valore di θ , il punto sull'ellisse risulta perfettamente definito.

Cerchiamo ora di scrivere qualche formula che ci permetta di passare dai

parametri caratteristici della forma polare a quelli della forma cartesiana. Sappiamo che $\frac{c}{a} = e$ e $\frac{b^2}{a} = l$, quindi $c = ae$. Ricordiamo, inoltre, che $b^2 = a^2 - c^2$.

Quindi

$$\begin{aligned} al &= a^2 - c^2 \\ al &= a^2 - (ae)^2 \end{aligned}$$

dunque

$$a = \frac{l}{1 - e^2} \quad (3)$$

$$c = \frac{el}{1 - e^2} \quad (4)$$

$$b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (5)$$

0.1.3 Iperbole: forma cartesiana

Come già fatto per l'ellisse, ricordiamo la definizione di iperbole:

un'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano in cui è costante il valore assoluto della differenza delle distanze dai fuochi.

Mettiamoci anche in questo caso, in un sistema di riferimento cartesiano, in cui l'origine O è il punto medio dei fuochi, che si trovano a distanza c da essa. L'asse x è la retta passante per i fuochi. Scriviamo l'equazione dell'iperbole.

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$$

dove a rappresenta la minima distanza dell'iperbole, dall'origine degli assi. Prendiamo in considerazione solo un ramo dell'iperbole (quelle che si trova nel semipiano $x > 0$), così possiamo togliere il modulo

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ x^2 + c^2 + 2xc + y^2 &= 4a^2 + x^2 + c^2 - 2xc + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ 4xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ x^2c^2 + a^4 - 2xca^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - 2xca^2 \\ x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

è l'equazione canonica dell'iperbole.

Osserviamo che in questo caso $b^2 = c^2 - a^2$, poiché nell'iperbole si ha che $0 < a < c$ al contrario dell'ellisse.

0.1.4 Iperbole: forma polare

Scriviamo anche in questo caso il cambiamento di coordinate da $(r; \theta)$ a $(x; y)$:

$$\begin{cases} x = -c + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Sostituiamo tali espressione nella (6) ed otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{c^2 + r^2 \cos^2 \theta - 2cr \cos \theta}{a^2} - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} &= 1 \\ b^2 c^2 + b^2 r^2 \cos^2 \theta - 2b^2 cr \cos \theta - a^2 r^2 + a^2 r^2 \cos^2 \theta &= a^2 b^2 \\ (b^2 + a^2) r^2 \cos^2 \theta - 2b^2 cr \cos \theta + b^2 (c^2 - a^2) &= a^2 r^2 \\ c^2 r^2 \cos^2 \theta - 2b^2 cr \cos \theta + b^4 &= a^2 r^2 \\ b^2 - cr \cos \theta &= ar \\ r(a + c \cos \theta) &= b^2 \end{aligned}$$

ponendo, come già visto, $\frac{c}{a} = e$ e $\frac{b^2}{a} = l$ otteniamo

$$r(1 + e \cos \theta) = l \quad (7)$$

che è l'equazione dell'iperbole in forma polare. Seppure la forma è identica a quella dell'ellisse ci sono sostanziali differenze, come ad esempio il fatto che, in questo caso, $e > 1$, quindi esiste tutto un intervallo di valori, per i quali la (7) non ha soluzione, mentre esistono 2 angoli $\theta_{1,2}$ (che corrispondono alle direzioni degli asintoti), per i quali

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_{1,2}} r(\theta) = \infty$$

Scriviamo anche in questo caso un semplice "dizionario" per passare dalla forma polare a quella cartesiana: ricordiamo che $c = ae$ e che $al = b^2$. Quindi

$$al = c^2 - a^2$$

$$al = (ae)^2 - a^2$$

da cui ricaviamo che

$$a = \frac{l}{e^2 - 1} \quad (8)$$

$$c = \frac{el}{e^2 - 1} \quad (9)$$

$$b = \frac{l}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad (10)$$

0.1.5 Parabola: forma cartesiana

Seguendo la definizione della parabola come *luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice*, possiamo mettere il vertice della parabola nell'origine: scegliamo un sistema di riferimento che ha l'origine nel punto medio del segmento avente un estremo nel fuoco e l'altro nel punto d'intersezione tra la direttrice e la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco; orientiamo l'asse x parallelo alla direttrice. Chiamiamo d la distanza del fuoco dall'origine (che è uguale alla distanza della direttrice dall'origine). L'equazione cartesiana si ricava dall'uguaglianza

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - d)^2} &= y + d \\ x^2 + y^2 + d^2 - 2dy &= y^2 + d^2 + 2dy \\ x^2 &= 4dy \end{aligned}$$

Quindi

$$y = \frac{x^2}{4d} \quad (11)$$

0.1.6 Parabola: forma polare

In modo analogo a quanto fatto per i casi precedenti, riferiamo le coordinate polari $(\rho; \theta)$ al fuoco, con $\theta = 0$ indicante il vertice della parabola. Le coordinate verificano le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = d - r \cos \theta \end{cases}$$

Sostituiamo tali espressioni nella (11) ed otteniamo

$$\begin{aligned}
 d - r \cos \theta &= \frac{r^2 \sin^2 \theta}{4d} \\
 4d^2 - 4dr \cos \theta &= r^2 - r^2 \cos^2 \theta \\
 r^2 \cos^2 \theta - 4dr \cos \theta + 4d^2 &= r^2 \\
 (2d - r \cos \theta)^2 &= r^2 \\
 2d - r \cos \theta &= r \\
 2d &= r(1 + \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Da cui, ponendo $2d = l$ otteniamo la forma polare della parabola

$$l = r(1 + \cos \theta) \quad (12)$$

Osserviamo che nel caso limite per $e \rightarrow 1$ l'espressione polare dell'iperbole e quella dell'ellisse convergono effettivamente al caso della parabola.

0.1.7 Coniche in forma polare

Per quanto appena osservato possiamo riassumere le forme polare delle tre coniche non degeneri nell'unica espressione

$$l = r(1 + e \cos \theta)$$

ricordando che

- $0 < e < 1$ si tratta di un'ellisse;
- $e = 1$ si tratta di una parabola;
- $e > 1$ si tratta di un'iperbole.