Tesi: ogni numero pari maggiore di due è esprimibile come somma di due numeri primi[1]:

$$2a = p+q$$

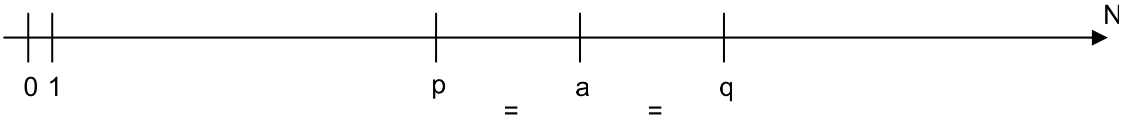
dove $a \in \{N; a \neq 1\}$ e p,q sono numeri primi.

=> $2a = p+q$ => $a+a = p+q$ => $a-p = q-a$

=> dimostrando che: $\forall a \in \{N; a \neq 1\} \exists$ p,q, definiti primi, tale che:

$$a-p = q-a$$

si dimostra la tesi.



Dimostrazione.

Risulta necessario trovare uno strumento matematico per definire un numero primo. A tale proposito si divide l'insieme dei numeri naturali N in sottoinsiemi così definiti:

1° sottoinsieme: $N_0 = \{0\}$;
2° sottoinsieme: $N_1 = \{1\}$;
3° sottoinsieme: $N_2 = \{2+6b; b \in N\}$;
4° sottoinsieme: $N_3 = \{3+6c; c \in N\}$;
5° sottoinsieme: $N_4 = \{4+6d; d \in N\}$;
6° sottoinsieme: $N_5 = \{5+6e; e \in N\}$;
7° sottoinsieme: $N_6 = \{6+6f; f \in N\}$;
8° sottoinsieme: $N_7 = \{7+6g; g \in N\}$.

La prima affermazione che si può fare è:

$$N_i \cap N_j = \{\varnothing\}$$

dove i,j = 0,1,…,7; i ≠ j. Tale affermazione si dimostra ponendo:

$$2+6b = 3+6c \quad \Rightarrow \quad b = (1/6)+c$$

dato che $b,c \in N$ si è giunti ad un assurdo => l'intersezione tra il 3° e il 4° sottoinsieme è un insieme vuoto. Così per tutte le altre combinazioni….

Inoltre, si può dimostrare che gli otto sottoinsiemi descrivono completamente N in quanto, sommando una unità ad un valore appartenente ad un sottoinsieme N_i, con i = 0,1,…,6, si ottiene un valore appartenente al sottoinsieme N_{i+1}, mentre, se i = 7, sommando una unità si ottiene un valore appartenente al sottoinsieme N_2, e così via….

Il prossimo passo consiste nel trovare a quale dei sottoinsiemi definiti appartengono i numeri primi:

1- $N_0 = \{0\}$; contiene nessun numero primo;
2- $N_1 = \{1\}$; contiene nessun numero primo;
3- $N_2 = \{2+6b; b \in N\}$; contiene solo il numero primo 2 in quanto tutti i restanti valori sono divisibili per il valore 2:

$$(2+6b)/2 = 1+3b \quad \in N \quad ; \quad b \in N$$

4- $N_3 = \{3+6c; c \in N\}$; contiene solo il numero primo 3 in quanto tutti i restanti valori sono divisibili per il valore 3:

$$(3+6c)/2 = 1+2c \quad \in N \quad ; \quad c \in N$$

5- $N_4 = \{4+6d; d \in N\}$; contiene nessun numero primo in quanto tutti i valori sono divisibili per il valore 2:

$$(4+6d)/2 = 2+3d \quad \in N \quad ; \quad d \in N$$

6- $N_5 = \{5+6e; e \in N\}$; in prima analisi contiene diversi numeri primi come 5,11,…; ma contiene valori che non sono primi come 35,70,…;

7- $N_6 = \{6+6f; f \in N\}$; contiene nessun numero primo in quanto tutti i valori sono divisibili per il valore 2:

$$(6+6f)/2 = 3+3f \quad \in N \quad ; \quad f \in N$$

8- $N_7 = \{7+6g; g \in N\}$; in prima analisi contiene diversi numeri primi come 7,13,…; ma contiene valori che non sono primi come 25,49,…;

In prima conclusione si può affermare che i numeri primi, tranne i valori 2,3, appartengono a N_5 e N_7. Questi due sottoinsiemi contengono, oltre che a numeri primi, valori non primi, che, per definizione, sono ottenuti dal prodotto di numeri primi:

1- $N_2 \cdot N_i$; con i = 2,3,5,7; si ottengono valori divisibili per 2 => $\in N_2,N_4,N_6$;

2- $N_3 \cdot N_i$; con i = 3,5,7; si ottengono valori divisibili per 3 => $\in N_3,N_6$;

3- $N_5 \cdot N_5$ => $(5+6a)(5+6b) = 25+30a+30b+36ab = 7+18+30a+30b+36ab =$

$= 7+6(3+5a+5b+6ab) = 7+6c$

=> si può affermare che:

- il prodotto tra due valori appartenenti a N_5 appartiene a N_7;
- tutti i valori c = 3+5a+5b+6ab; con a,b $\in$ N, descrivono valori appartenenti a N_7 che a loro volta descrivono valori non primi in N;

4- $N_5 \cdot N_7$ => $(5+6d)(7+6e) = 35+30e+42d+36de = 5+30+30e+42d+36de =$

$= 5+6(5+5e+7d+6de) = 5+6f$

=> si può affermare che:

- il prodotto tra due valori appartenenti a N_5 e N_7 appartiene a N_5;
- tutti i valori f = 5+5e+7d+6de; con d,e $\in$ N, descrivono valori appartenenti a N_5 che a loro volta descrivono valori non primi in N;

5- $N_7 \cdot N_7$ => $(7+6g)(7+6h) = 49+42g+42h+36gh = 7+42+42g+42h+36gh =$

$= 7+6(7+7g+7h+6gh) = 7+6m$

=> si può affermare che:

- il prodotto tra due valori appartenenti a N_7 appartiene a N_7;
- tutti i valori m = 7+7g+7h+6gh; con g,h $\in$ N, descrivono valori appartenenti a N_7 che a loro volta descrivono valori non primi in N.

In ultima analisi, i numeri primi appartenenti a N possono essere descritti nel seguente modo:

N_5‘: sottoinsieme dei numeri primi appartenente a N_5;

$$N_5' = \{5+6c; c \neq 5+5a+7b+6ab; a,b \in N\}$$

N_7‘: sottoinsieme dei numeri primi appartenente a N_7;

N_7‘ = {7+6f; f ≠ 3+5d+5e+6de; f ≠ 7+7g+7h+6gh; d,e,g,h Є N}

P: insieme dei numeri primi appartenenti a N;

P = {2,3,N_5‘ U N_7‘}

Si considera adesso un segmento che descrive un intervallo di valori appartenenti a N. Si può notare che:

N ↑	
100	N_4
101	N_5
102	N_6
103	N_7
104	N_2
105	N_3
106	N_4
107	N_5
108	N_6
109	N_7
110	N_2
111	N_3
112	N_4
113	N_5
114	N_6
115	N_7
116	N_2
117	N_3
118	N_4
119	N_5
N ↓	

- i valori appartenenti a N_2 sono equidistanti da valori appartenenti a N_5;
- i valori appartenenti a N_3 sono equidistanti da coppie di valori appartenenti a N_5,N_7;
- i valori appartenenti a N_4 sono equidistanti da valori appartenenti a N_7;
- i valori appartenenti a N_5 sono equidistanti da valori appartenenti a N_5;
- i valori appartenenti a N_6 sono equidistanti da coppie di valori appartenenti a N_5,N_7;
- i valori appartenenti a N_7 sono equidistanti da valori appartenenti a N_7;

perciò, se si dimostra che:

- ∀ valore appartenente a N_2 e N_5 esistono sempre due valori p_5,q_5 Є N_5‘ tale per cui vale:

  $a_2 – p_5 = q_5 – a_2$

  oppure

  $a_5 – p_5 = q_5 – a_5$

  dove a_2 Є N_2 e a_5 Є N_5;
- ∀ valore appartenente a N_3 e N_6 esistono sempre due valori p_5 Є N_5‘ e q_7 Є N_7‘ tale per cui vale:

  $a_3 – p_5 = q_7 – a_3$

  oppure

  $a_6 – p_5 = q_7 – a_6$

  dove a_3 Є N_3 e a_6 Є N_6;
- ∀ valore appartenente a N_4 e N_7 esistono sempre due valori p_7,q_7 Є N_7‘ tale per cui vale:

  $a_4 – p_7 = q_7 – a_4$

  oppure

  $a_7 – p_7 = q_7 – a_7$

  dove a_4 Є N_4 e a_7 Є N_7;

si dimostra la tesi.

Analisi di N_5 e N_5‘.

Se si considera m appartenente a N_2 (oppure a N_5) si avranno n = [(m-2)/6] (n = [(m-5)/6]+1 nel caso si consideri N_5; con la parentesi quadra si vuole indicare la parte intera della frazione) valori appartenenti a N_5 e minori di m; allo stesso modo, si avranno [(2m-2)/6]-[(m-2)/6] ([(2m-5)/6]-[(m-5)/6] nel caso si consideri N_5) valori appartenenti a N_5 e compresi nell’intervallo (m;2m).

Si definisce n il numero di valori appartenenti a N_5 e minori o uguali a m, si definisce π_5‘(0;n) il numero di valori appartenenti a N_5’ e minori o uguali a m, si definisce π_5(0;n) il complementare a n di π_5‘(0;n).

Risulta essere ovvio a questo punto che: se $\forall\ m \in N_2$ (oppure N_5) $\pi_5'(0;n) > \pi_5(0;n)/2$ la tesi è dimostrata, in quanto si hanno n valori nell'intervallo (0;m), n valori nell'intervallo (m;2m) e sono tra loro simmetrici rispetto m; se la metà più uno da una parte mi descrive un numero primo e lo stesso per l'altra parte simmetrica, si ottiene la certezza matematica che 2m è dato dalla somma di due numeri primi.

I valori non appartenenti a N_5' ma appartenenti a N_5 sono descritti dalla seguente relazione:

$$n_5 = 5+5a+7b+6ab \qquad (1)$$

dove $a,b \in N$. Nella seguente matrice si riportano i valori di n_5 (nella prima colonna si riporta i valori di b, nella prima riga si riporta i valori di a, i restanti valori sono descritti dalla relazione $n_5(a,b)$):

b,a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	122	133	144	155	166	177	188	199	210	221
2	19	36	53	70	87	104	121	138	155	172	189	206	223	240	257	274	291	308	325	342
3	26	49	72	95	118	141	164	187	210	233	256	279	302	325	348	371	394	417	440	463
4	33	62	91	120	149	178	207	236	265	294	323	352	381	410	439	468	497	526	555	584
5	40	75	110	145	180	215	250	285	320	355	390	425	460	495	530	565	600	635	670	705
6	47	88	129	170	211	252	293	334	375	416	457	498	539	580	621	662	703	744	785	826
7	54	101	148	195	242	289	336	383	430	477	524	571	618	665	712	759	806	853	900	947
8	61	114	167	220	273	326	379	432	485	538	591	644	697	750	803	856	909	962	1015	1068
9	68	127	186	245	304	363	422	481	540	599	658	717	776	835	894	953	1012	1071	1130	1189
10	75	140	205	270	335	400	465	530	595	660	725	790	855	920	985	1050	1115	1180	1245	1310
11	82	153	224	295	366	437	508	579	650	721	792	863	934	1005	1076	1147	1218	1289	1360	1431
12	89	166	243	320	397	474	551	628	705	782	859	936	1013	1090	1167	1244	1321	1398	1475	1552
13	96	179	262	345	428	511	594	677	760	843	926	1009	1092	1175	1258	1341	1424	1507	1590	1673
14	103	192	281	370	459	548	637	726	815	904	993	1082	1171	1260	1349	1438	1527	1616	1705	1794
15	110	205	300	395	490	585	680	775	870	965	1060	1155	1250	1345	1440	1535	1630	1725	1820	1915
16	117	218	319	420	521	622	723	824	925	1026	1127	1228	1329	1430	1531	1632	1733	1834	1935	2036
17	124	231	338	445	552	659	766	873	980	1087	1194	1301	1408	1515	1622	1729	1836	1943	2050	2157
18	131	244	357	470	583	696	809	922	1035	1148	1261	1374	1487	1600	1713	1826	1939	2052	2165	2278
19	138	257	376	495	614	733	852	971	1090	1209	1328	1447	1566	1685	1804	1923	2042	2161	2280	2399

si nota che la prima riga rappresenta la tabellina del 5, la seconda riga rappresenta la tabellina dell'11 aumentata di 1, la terza riga rappresenta la tabellina del 17 aumentata di 2, e così via…, infatti, la relazione $n_5(a,b)$ può essere scritta come:

$$n_5 = c+(5+6c)d$$

dove $c,d \in N$;

Un’altra costruzione possibile dei n_5 è:

N	**n_5**	5	11	17	23	29	35	41	47
1									
2									
3									
4									
5	**5**	**5**							
6									
7									
8									
9									
10	**10**	**10**							
11									
12	**12**		**12**						
13									
14									
15	**15**	**15**							
16									
17									
18									
19	**19**			**19**					
20	**20**	**20**							
21									
22									
23	**23**		**23**						
24									
25	**25**	**25**							
26	**26**				**26**				
27									
28									
29									
30	**30**	**30**							
31									
32									
33	**33**					**33**			
34	**34**		**34**						
35	**35**	**35**							
36	**36**			**36**					
37									
38									
39									
40	**40**	**40**					**40**		
41									
42									
43									
44									
45	**45**	**45**	**45**						
46									
47	**47**							**47**	
48									
49	**49**				**49**				
50	**50**	**50**							
51									
52									

inoltre, si nota che quando b (oppure, se si preferisce, c) assume valori descritti da $n_5(a,b)$ si ottiene una riga di valori già descritti nelle righe precedenti, cioè:

- per b = 5 si ottengono valori della prima riga;
- per b = 10 si ottengono valori della prima riga;
- per b = 12 si ottengono valori della terza riga;
- …
- per b = 19 si ottengono valori della seconda riga;
- …

Perciò, un modo per contare $\pi_5'(0;n)$ è:

$$\pi_5'(0;n) = n-\pi_5(0;n) = n - \sum_{i=0}^{(n-5)/7} [(n-i)/(5+6i)]$$

se si inizia a contare ci si accorge che:

- per n > 200 $\pi_5'(0;n) < \pi_5(0;n)/2$;
- se si continua il valore della sommatoria supera ben presto n, il che è impossibile;

l'errore sta nel fatto che la sommatoria tiene conto sia delle righe "multiple" sia di valori "multipli" che appartengono a righe non "multiple", e cioè:

- la seconda riga contiene un valore ogni cinque appartenente alla prima riga;
- la terza riga contiene un valore ogni cinque appartenente alla prima riga ed un valore ogni undici appartenente alla seconda riga ed un valore ogni cinquantacinque appartenente sia alla prima riga che alla seconda riga;
- ….

È necessario quindi trovare un altro modo per esprimere $\pi_5(0;n)$.

Ma che cosa accade quando si passa da N_5 a N_5'?

N_5' è dato da N_5 privato di alcuni valori, e per l'esattezza di:

- un valore ogni cinque;
- un valore ogni undici;
- un valore ogni diciassette;
- …;

quindi, non si fa altro che, dato un certo intervallo, privare tale intervallo di valori ogni a, ogni b, ogni c, ogni …, dove a,b,c,… sono primi tra loro, il che significa:

1- si considera un certo intervallo (u;v);

2- si priva l'intervallo di un valore ogni a => l'intervallo sarà diminuito in quantità di elementi di un valore pari a:

$$1/a$$

3- si priva l'intervallo di un valore ogni b => l'intervallo sarà diminuito in quantità di elementi di un valore pari a:

$$1/a+1/b-1/(ab) \qquad (2)$$

4- si pone la (2) uguale a $1/z_1$ e si priva l'intervallo di un valore ogni c => l'intervallo sarà diminuito in quantità di elementi di un valore pari a:

$$1/z_1+1/c-1/(z_1c)$$

5- …

…- …

i- alla fine delle iterazioni si ottiene che $1/z_i$ tende a $\pi(u;v)/(v-u)$, dove v > u;

solo che si è passati dal considerare solo valori interi positivi al considerare anche valori razionali positivi.

Ciò che si è ottenuto è che non si potrà mai privare l'intervallo di tutti i suoi valori a meno che non si privi l'intervallo di un valore $d = 1$:

$$1/d+1/e-1/(de) < 1 \quad \Rightarrow \quad e+d-1 < de \qquad (3)$$

in quanto la (3) è sempre vera per valori $d,e > 1$.
Nel 1962 J.B. Rosser[2] ha dimostrato che:

$$\pi(m) \geq m/\ln(m) \quad ; \quad \forall\, m > 11$$

dove $\pi(m)$ rappresenta la quantità di numeri primi nell'intervallo (0;m), questo significa anche che $\pi(m)$ descrive l'intervallo (0;m) privato di un valore ogni 2, ogni 3, ogni 5,…, per cui si può dire che:

$$\pi_5'(0;n) \geq \pi(n) \geq n/\ln(n)$$

$$\Rightarrow \quad \pi_5(0;n) = n-\pi_5'(0;n) \leq n-n/\ln(n) = n\big(1-1/\ln(n)\big)$$

Inoltre, per dimostrare la tesi, si deve ripetere l'operazione sullo stesso intervallo due volte e partendo da origini differenti, ma questo comporta solo ad avvicinare la quantità di elementi privati all'intervallo alla quantità totale di elementi presenti nell'intervallo senza però raggiungere mai tale quantità in quanto non si preleva mai un valore ogni $d = 1$.
Questo però non basta a dimostrare la tesi in quanto si può ottenere che il 99,999% (tale valore vuole sottolineare il fatto che si è passati da considerare valori interi positivi a valori razionali positivi) dei valori appartenenti all'intervallo sia stato prelevato e che l'intervallo sia composto da 10 valori, il che comporta che tutti e dieci i valori sono stati prelevati. Per cui quando si torna a considerare insiemi di valori interi positivi ciò che si è ottenuto potrebbe perdere di significato.
Quindi, bisogna dimostrare che:

$$n\big(1-\pi_5(0;n)/n-\pi_5(n;2n)/n+\big(\pi_5(0;n)\pi_5(n;2n)\big)/n^2\big) \geq 1 \quad ; \quad \forall\, n \in N$$

dove $\pi_5(0;n)$ rappresenta la quantità di valori descritti dalla relazione (1) nell'intervallo (0;n) e $\pi_5(n;2n)$ rappresenta la quantità di valori descritti dalla relazione (1) nell'intervallo (n;2n):

$$n\big(2/\ln(2n)-1/\ln(n)\big)/\ln(n) \geq 1$$

il che è sempre vero $\forall\, n > 10$, $n \in N$. Perciò, se $\pi_5'(0;n) \geq \pi(n) \geq n/\ln(n)$ la tesi $\forall\, m \in N_2$ (oppure $\in N_5$) risulta essere dimostrata.

Analisi di N_7 e N_7'.

Se si considera m appartenente a N_4 (oppure a N_7) si avranno $n = [(m-4)/6]$ ($n = [(m-7)/6]+1$ nel caso si consideri N_7) valori appartenenti a N_7 e minori di m; allo stesso modo, si avranno $[(2m-4)/6]-[(m-4)/6]$ ($[(2m-7)/6]-[(m-7)/6]$ nel caso si consideri N_7) valori appartenenti a N_7 e compresi nell'intervallo (m;2m).
Si definisce n il numero di valori appartenenti a N_7 e minori o uguali a m, si definisce $\pi_7'(0;n)$ il numero di valori appartenenti a N_7' e minori o uguali a m, si definisce $\pi_7(0;n)$ il complementare a n di $\pi_7'(0;n)$.
Risulta essere ovvio a questo punto che: se $\forall\, m \in N_4$ (oppure N_7) $\pi_7'(0;n) > \pi_7(0;n)/2$ la tesi è dimostrata, in quanto si hanno n valori nell'intervallo (0;m), n valori nell'intervallo (m;2m) e sono tra loro simmetrici rispetto m; se la metà più uno da una parte mi descrive un numero primo e lo stesso per l'altra parte simmetrica, si ottiene la certezza matematica che 2m è dato dalla somma di due numeri primi.
I valori non appartenenti a N_7' ma appartenenti a N_7 sono descritti dalle seguenti relazioni:

$$n_{7.1} = 3+5a+5b+6ab \qquad (5)$$

$$n_{7.2} = 7+7c+7d+6cd \qquad (6)$$

dove $a,b,c,d \in N$.

Nelle seguenti matrici simmetriche si riportano i valori di $n_{7.1}$ e $n_{7.2}$:

a,b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73	78	83	88	93	98
1	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	118	129	140	151	162	173	184	195	206	217
2	13	30	47	64	81	98	115	132	149	166	183	200	217	234	251	268	285	302	319	336
3	18	41	64	87	110	133	156	179	202	225	248	271	294	317	340	363	386	409	432	455
4	23	52	81	110	139	168	197	226	255	284	313	342	371	400	429	458	487	516	545	574
5	28	63	98	133	168	203	238	273	308	343	378	413	448	483	518	553	588	623	658	693
6	33	74	115	156	197	238	279	320	361	402	443	484	525	566	607	648	689	730	771	812
7	38	85	132	179	226	273	320	367	414	461	508	555	602	649	696	743	790	837	884	931
8	43	96	149	202	255	308	361	414	467	520	573	626	679	732	785	838	891	944	997	1050
9	48	107	166	225	284	343	402	461	520	579	638	697	756	815	874	933	992	1051	1110	1169
10	53	118	183	248	313	378	443	508	573	638	703	768	833	898	963	1028	1093	1158	1223	1288
11	58	129	200	271	342	413	484	555	626	697	768	839	910	981	1052	1123	1194	1265	1336	1407
12	63	140	217	294	371	448	525	602	679	756	833	910	987	1064	1141	1218	1295	1372	1449	1526
13	68	151	234	317	400	483	566	649	732	815	898	981	1064	1147	1230	1313	1396	1479	1562	1645
14	73	162	251	340	429	518	607	696	785	874	963	1052	1141	1230	1319	1408	1497	1586	1675	1764
15	78	173	268	363	458	553	648	743	838	933	1028	1123	1218	1313	1408	1503	1598	1693	1788	1883
16	83	184	285	386	487	588	689	790	891	992	1093	1194	1295	1396	1497	1598	1699	1800	1901	2002
17	88	195	302	409	516	623	730	837	944	1051	1158	1265	1372	1479	1586	1693	1800	1907	2014	2121
18	93	206	319	432	545	658	771	884	997	1110	1223	1336	1449	1562	1675	1788	1901	2014	2127	2240
19	98	217	336	455	574	693	812	931	1050	1169	1288	1407	1526	1645	1764	1883	2002	2121	2240	2359

in riferimento a $n_{7.1}$ si nota che la prima riga rappresenta la tabellina del 5 traslata di 3, la seconda riga rappresenta la tabellina dell'11 traslata di 3+5, la terza riga rappresenta la tabellina del 17 traslata di 3+10, e così via…, infatti, la relazione $n_{7.1}(a,b)$ può essere scritta come:

$$n_{7.1} = 3+5a+(5+6a)b$$

dove a,b Є N;
in riferimento a $n_{7.2}$ si nota che la prima riga rappresenta la tabellina del 7, la seconda riga rappresenta la tabellina del 13 aumentata di 1, la terza riga rappresenta la tabellina del 19 aumentata di 2, e così via…, infatti, la relazione $n_{7.2}(c,d)$ può essere scritta come:

$$n_{7.2} = 7+7e+(7+6e)f$$

dove e,f Є N;
inoltre, si nota che quando i coefficienti assumono valori descritti da $n_{7.1}$ (o $n_{7.2}$) si ottiene una riga di valori già descritti nelle righe precedenti.

c,d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157	170	183	196	209	222	235	248	261
2	21	40	59	78	97	116	135	154	173	192	211	230	249	268	287	306	325	344	363	382
3	28	53	78	103	128	153	178	203	228	253	278	303	328	353	378	403	428	453	478	503
4	35	66	97	128	159	190	221	252	283	314	345	376	407	438	469	500	531	562	593	624
5	42	79	116	153	190	227	264	301	338	375	412	449	486	523	560	597	634	671	708	745
6	49	92	135	178	221	264	307	350	393	436	479	522	565	608	651	694	737	780	823	866
7	56	105	154	203	252	301	350	399	448	497	546	595	644	693	742	791	840	889	938	987
8	63	118	173	228	283	338	393	448	503	558	613	668	723	778	833	888	943	998	1053	1108
9	70	131	192	253	314	375	436	497	558	619	680	741	802	863	924	985	1046	1107	1168	1229
10	77	144	211	278	345	412	479	546	613	680	747	814	881	948	1015	1082	1149	1216	1283	1350
11	84	157	230	303	376	449	522	595	668	741	814	887	960	1033	1106	1179	1252	1325	1398	1471
12	91	170	249	328	407	486	565	644	723	802	881	960	1039	1118	1197	1276	1355	1434	1513	1592
13	98	183	268	353	438	523	608	693	778	863	948	1033	1118	1203	1288	1373	1458	1543	1628	1713
14	105	196	287	378	469	560	651	742	833	924	1015	1106	1197	1288	1379	1470	1561	1652	1743	1834
15	112	209	306	403	500	597	694	791	888	985	1082	1179	1276	1373	1470	1567	1664	1761	1858	1955
16	119	222	325	428	531	634	737	840	943	1046	1149	1252	1355	1458	1561	1664	1767	1870	1973	2076
17	126	235	344	453	562	671	780	889	998	1107	1216	1325	1434	1543	1652	1761	1870	1979	2088	2197
18	133	248	363	478	593	708	823	938	1053	1168	1283	1398	1513	1628	1743	1858	1973	2088	2203	2318
19	140	261	382	503	624	745	866	987	1108	1229	1350	1471	1592	1713	1834	1955	2076	2197	2318	2439

Perciò, un modo per contare $\pi_7'(0;n)$ è:

$$\pi_7'(0;n) = n-\pi_7(0;n) = n - \sum_{i=0}^{(n-8)/11} [(n-3-5i)/(5+6i)] - \sum_{j=0}^{(n-14)/13} [(n-7-7j)/(7+6j)] - 2$$

se si inizia a contare ci si accorge che il valore delle due sommatorie supera ben presto n, il che è impossibile; l'errore sta nel fatto che la sommatoria tiene conto sia delle righe "multiple" sia di valori "multipli" che appartengono a righe non "multiple".

È necessario quindi trovare un altro modo per esprimere $\pi_7(0;n)$.

Utilizzando lo stesso ragionamento applicato precedentemente si ha:

7.1- $\pi_{7.1}'(0;n) \geq \pi(n) \geq n/\ln(n)$

$\Rightarrow \quad \pi_{7.1}(0;n) = n-\pi_{7.1}'(0;n) \leq n-n/\ln(n) = n\big(1-1/\ln(n)\big)$

7.2- $\pi_{7.2}'(0;n) \geq \pi(n) \geq n/\ln(n)$

$\Rightarrow \quad \pi_{7.2}(0;n) = n-\pi_{7.2}'(0;n) \leq n-n/\ln(n) = n\big(1-1/\ln(n)\big)$

Applicando lo stesso procedimento applicato precedentemente si ottiene:

$$\pi_7(n) = n\left(\pi_{7.1s}(n)/n+\pi_{7.2s}(n)/n-\pi_{7.1s}(n)\pi_{7.2s}(n)/n^2\right) = n\left(1-1/\ln^2(n)\right)$$

Ricordando il procedimento eseguito precedentemente basta dimostrare che:

$$n\left(1-\pi_7(0;n)/n-\pi_7(n;2n)/n+\left(\pi_7(0;n)\pi_7(n;2n)\right)/n^2\right) \geq 1 \quad ; \quad \forall\, n \in N$$

dove $\pi_7(0;n)$ rappresenta la quantità di valori descritti dalle relazioni (5),(6) nell'intervallo (0;n) e $\pi_7(n;2n)$ rappresenta la quantità di valori descritti dalle relazioni (5),(6) nell'intervallo (n;2n):

$$n\left(2/\ln^2(2n)-1/\ln^2(n)\right)/\ln^2(n) \geq 1$$

il che è sempre vero $\forall$ n ≥ 9769, n Є N. Perciò la tesi $\forall$ m Є N_4 (oppure Є N_7) risulta essere dimostrata.

Considerazioni sulle stime.

Il ragionamento fin qui fatto si è basato sull'ipotesi che le funzioni $\pi_5(0;n),\pi_7(0;n)$ rappresentino approssimazioni per eccesso, il che implica:

- preso un intervallo (0;m) Є N;
- il numero di numeri primi appartenenti a N_5‘ è dato da π_5‘(n), dove n = [(m-5)/6+1];
- il numero di numeri primi appartenenti a N_7‘ è dato da π_7‘(n), dove n = [(m-7)/6+1];
- posto la quantità di numeri primi compresi nell'intervallo (0;m) pari a π(m), si deve avere che:

$$\pi(m) \geq m/\ln(m) \geq \pi_5'(n)+\pi_7'(n)+2$$

$$\Rightarrow \quad m/\ln(m) \geq \left((m-5)/6+1\right)/\ln\left((m-5)/6+1\right)+\left((m-7)/6+1\right)/\ln^2\left((m-7)/6+1\right)+2 \geq$$

$$\geq \left((m-5)/6+1\right)/\ln(m)+\left((m-7)/6+1\right)/\ln^2(m)+2 \approx m/\left(6*\ln(m)\right)+m/\left(6*\ln^2(m)\right)+2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq 1/6+1/\left(6*\ln(m)\right)+2\ln(m)/m$$

il che è sempre vero $\forall$ m > 11. Dato che la quantità di numeri primi stimata risulta essere minore della quantità reale di numeri primi nell'intervallo (0;m), la quantità di valori descritti dalle relazioni $n_5,n_{7.1},n_{7.2}$ (cioè quei valori che appartengono a N_5,N_7 ma non descrivono valori primi) indicate rispettivamente con $\pi_5(0;n),\pi_{7.1}(0;n),\pi_{7.2}(0;n)$ rappresentano una stima per eccesso.

Analisi di N_3 e N_6.

Per completare la dimostrazione bisogna dimostrare le seguenti relazioni:

1- $n\left(1-\pi_5(0;n)/n-\pi_7(n;2n)/n+\left(\pi_5(0;n)\pi_7(n;2n)\right)/n^2\right) \geq 1$

$\Rightarrow \quad n\left(2/\ln^2(2n)-1/\ln^2(n)\right)/\ln(n) \geq 1$

il che è sempre vero $\forall$ n ≥ 326, n Є N.

2- $n\left(1-\pi_7(0;n)/n-\pi_5(n;2n)/n+\left(\pi_7(0;n)\pi_5(n;2n)\right)/n^2\right) \geq 1$

$\Rightarrow \quad n\left(2/\ln(2n)-1/\ln(n)\right)/\ln^2(n) \geq 1$

il che è sempre vero $\forall$ n ≥ 187, n Є N.

Conclusioni.

Tale dimostrazione si è basata su una suddivisione dell'insieme dei numeri naturali N in sottoinsiemi ben definiti ed aventi proprietà speculari tra loro.

Attraverso stime di valori che descrivono valori primi in N si è giunti con l'affermare che $\forall m \geq 58621$ ($\Rightarrow n \geq 9769$) la tesi è verificata.

In ultima analisi, le stime considerate possono essere migliorate e quindi ottenere la validità della tesi per m minori.

Conseguenze del teorema.

I numeri primi gemelli sono descritti, secondo la suddivisione di N in sottoinsiemi precedentemente proposta, da un valore appartenente a N_5' e da un valore appartenente a N_7' aventi lo stesso n, cioè:

- p,q sono due numeri primi gemelli se e solo se:
  - $p \in N_5'$; $p = 5+6n$; $n \neq 5+5a+7b+6ab$; $a,b \in N$;
  - $q \in N_7'$; $q = 7+6n$; $n \neq 3+5c+5d+6cd$; $n \neq 7+7e+7f+6ef$; $c,d,e,f \in N$;

perciò, tutti i valori n che non sono descritti dalle relazioni $n_5, n_{7.1}, n_{7.2}$ descrivono valori primi gemelli in N.

In prima analisi la quantità di valori primi gemelli in N è data da:

$$\pi_g(0;n) = n\left(1-\pi_5(0;n)/n-\pi_7(0;n)/n+\left(\pi_5(0;n)\pi_7(0;n)\right)/n^2\right) = n/\ln^3(n)$$

dove con $\pi_g(0;n)$ si è indicato la quantità di coppie di numeri gemelli nell'intervallo (0;n). Quest'ultima relazione risulta essere maggiore di uno per $n \geq 94$.

Bibliografia.

[1] "Stupefacenti numeri primi – Viaggio nel cuore dell'aritmetica", scritto da Jean-Paul Delahaye, edito da Ghisetti e Corvi Editori. Pagina n°147.

[2] "Stupefacenti numeri primi – Viaggio nel cuore dell'aritmetica", scritto da Jean-Paul Delahaye, edito da Ghisetti e Corvi Editori. Pagina n°201.