

Tale x si ha $1/2 \leq x \leq 1$ e $IP(x) = 2^{x-1} \cdot 2^{1-x} = 1$. Dunque
 punto medio x della $IP(x)$ è $1/2$ e $2^{x-1} = 1$ per cui vale
 $2^{x-1} = 1$

Adesso, immediatamente che x e y hanno la stessa parità
 (e quindi $2^{x-1} = 2^{y-1}$), si ha la uguaglianza $x = y$ per il fatto che
 primo membro è 2^{x-1} e secondo 2^{y-1} . Inoltre la dimostrazione
 è così:

Un'alternativa prima di andare con i conti:
 1) $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Se $y < x$, si suppone come
 differenza di gradi, se $x = y$ allora
 $2^{x-1} = 2^{y-1} \Rightarrow x = y$ impossibile
 $x = y = 2^{x-1} = 2^{y-1}$
 $x = (y + 2^{x-1}) (y + 2^{x-1})$

Ora il secondo fattore che usiamo è sempre positivo o
 uguale a zero, il primo (che è uguale a zero) si ha $x = y$
 e uno (≥ 0) , dunque

$y < x$ (altrimenti il primo fattore sarebbe sicuramente $> x$).

$y = 2^{x-1} \geq 0$ (altrimenti il primo fattore sarebbe negativo) e $y \geq 2^{x-1}$ ed $y < x$
 da $y \geq 2^{x-1} \Rightarrow 2^{x-1} \geq 2^{x-1} \Rightarrow x = y$ (si può verificare per induzione)
 Questo genera un secondo caso a $IP(x) > IP(y)$

Nel caso in cui $x = 0$ per l'unicità del prodotto
 dei numeri $2^{x-1} = 2^{y-1} = 2^{x-1} = 2^{y-1} = 1$ che risulta minore
 di $y \forall y \in \mathbb{N}$ (se $y = 0$ $y = 1$ è un caso). Per $x = 1$, si ha $2^{x-1} = 1$ e
 quindi:

1) $x < 0$, $y \geq 0$

Assumo $p = 1/2$

$$2^{x-1} = 2^{y-1} + p$$

$$p = (2^{x-1} + y)(2^{x-1} - y)$$

$2^{x-1} + y$ ha sicuramente una minore di p e pertanto
 $y < p$

FIG. 1. Criterio di validità

$$p > 4 \Rightarrow \text{una } y + 2 \frac{x^2}{p} > 2 \frac{x^2}{p} = 2 \frac{(p-1)}{2} > p \quad \forall p > 5, \text{ e}$$

$$p = 3, 7, 11, 13, \dots \text{ allora si garantisce che } \text{esiste.}$$

D. $x > 0 \wedge y < 0$
 Assumo $q = 1/4$
 $x^2 + q = q^2 + x$
 $x = q^2 - x^2$
 $x = (q - x^2)(q + x^2)$
 per $x > 0$ $q < x$
 $q = 2 \frac{x^2 - q}{x^2 + q} > 0$
 $q > 2 \frac{x^2 - q}{x^2 + q} > 2 \frac{x^2 - q}{x^2 + q} = 2 \frac{(3-1)}{2} > 2 \quad \forall x > 0 \in \mathbb{N}$
 che e' come q/a che assume
 se $x = 0$
 $2^q = q^2$ che e' vero per $q = 1/4$ e per $q = 4$ e infatti
 per l'induzione che $2^q > q^2$. Da cui siamo che soluzioni
 $(0, -2)$ e $(0, -4)$.