A4 1/1 PATIMO 1/48

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{c+a}{c-a}+\frac{b+c}{b-c}\right|>1$$

Poichè la disuguaglianza è ciclica posso scegliere a come il massimo tra a, b e c. wlog.

Inoltre sia $f(a,b,c) = LHS$.

Abbiamo che $f(a,b,c) = f(a,c,b)$ infatti

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{c+a}{c-a}+\frac{b+c}{b-c}\right| = \left|-\left(\frac{a+c}{a-c}+\frac{b+a}{b-a}+\frac{c+b}{c-b}\right)\right| = f(a,c,b)$$

Quindi posso scegliere wlog $b \geq c$

Sia $x = b-c$ e $y = a-b$. Per le condizioni prese su a,b,c abbiamo che $x,y>0$.

Posso riscrivere la tesi:

$$\left|\frac{2c+2x+y}{y}-\frac{2c+x+y}{x+y}+\frac{2c+x}{x}\right| = \left|1+2\left(\frac{c+x}{y}-\frac{c}{x+y}+\frac{c}{x}\right)\right|$$

L'espressione tra parentesi è maggiore di 0 perchè

$\frac{c}{x} > \frac{c}{x+y}$ in quanto $x+y>x$.

Quindi $LHS \geq \left|1+2\left(\frac{c}{x}-\frac{c}{x+y}\right)\right| > \underline{1}$

che è la tesi.