

Oliforum Contest - Round 1

Soluzioni di Giove

21 settembre 2008

Problema 1

Possiamo supporre che il nostro insieme sia $A = \{0, 1, \dots, 2192\}$ al posto di $\{2008, 2009, \dots, 4200\}$, in quanto l'importante è che ci siano $4200 - 2008 + 1 = 2193$ numeri consecutivi.

Sia S l'insieme degli interi x tali che $0 \leq x \leq 2192$ e x in base 3 si scrive solo con cifre “0” e “1”.

Vogliamo dimostrare che non esistono tre elementi (distinti) di S che sono in progressione aritmetica.

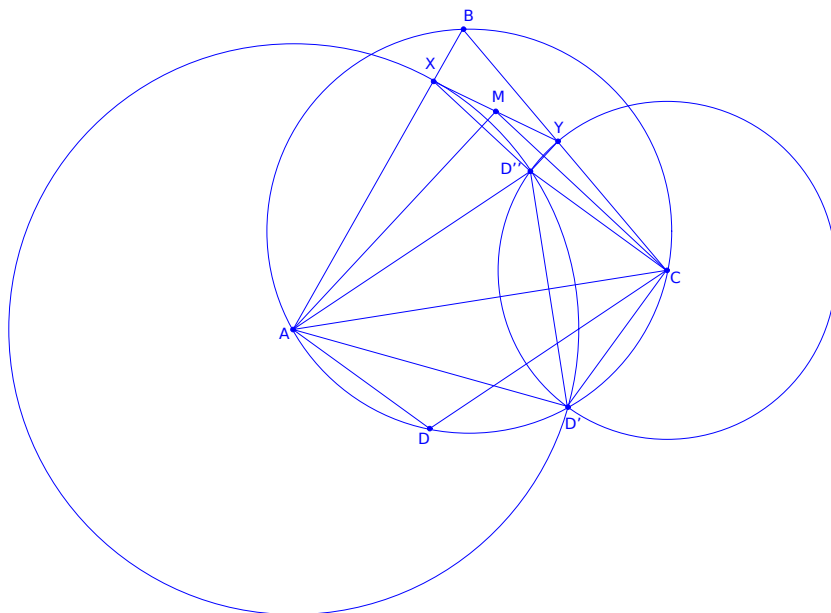
Supponiamo per assurdo che esistano $a, b, c \in S$ con $a < b < c$ e $c - b = b - a$, ovvero $a + c = 2b$. In base 3 il numero $2b$ avrà soltanto cifre “0” e “2”; $a + c$ d'altra parte avrà cifre “0” solo se le corrispondenti cifre in a e c saranno “0” e avrà cifre “2” se le corrispondenti cifre in a e c saranno “1”; dal momento che a e c differiscono in almeno una cifra (sono distinti), $a + c$ avrà un “1” in almeno una posizione, il che è assurdo.

Quindi tutti gli elementi di S soddisfano l'ipotesi richiesta dal problema.

Resta solo da dimostrare che $|S| \geq 5^3 = 125$. In base 3, 2192 è $10000012_{(3)}$; i numeri minori di $2187 = 10000000_{(3)}$ appartenenti ad S sono $2^7 = 128$ (ogni cifra posso sceglierla in 2 modi e ho 7 cifre a disposizione), che sono già sufficienti per superare 125.

Quindi esistono più di 5^3 elementi di A che a tre a tre non sono in progressione aritmetica.

Problema 2



Sia D' il simmetrico di D rispetto all'asse di AC ; D' si trova sulla circonferenza circoscritta ad $ABCD$ perché l'asse di AC passa per il centro di questa circonferenza. Sia inoltre D'' il simmetrico di D' rispetto ad AC (e quindi il simmetrico di D rispetto al punto medio di AC). Per ipotesi $AX = CD$ e per costruzione $CD = AD' = AD''$, quindi $AX = AD' = AD''$. Allo stesso modo $CY = CD' = CD''$. Sia Γ_1 la circonferenza di centro A passante per X, D', D'' e Γ_2 la circonferenza di centro C passante per Y, D', D'' .

La condizione di ciclicità di $ABCD'$ può essere riscritta come $\widehat{XAD'} + \widehat{YCD'} = \pi$.

Considerando la circonferenza Γ_1 , l'angolo al centro $\widehat{XAD'}$ insiste su uno dei due archi XD' e l'angolo alla circonferenza $\widehat{XD''D'}$ insiste sull'altro. Quindi vale la relazione $\widehat{XD''D'} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{XAD'}$.

Allo stesso modo $\widehat{YD''D'} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{YCD'}$.

Sommando membro a membro si ottiene che

$$\widehat{XD''D'} + \widehat{YD''D'} = 2\pi - \frac{1}{2}(\widehat{XAD'} + \widehat{YCD'}) = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

quindi $\widehat{XD''Y} = \frac{\pi}{2}$.

Dato che il triangolo XAD'' è isoscele, l'asse di XD'' passa per A ; inoltre dal momento che $XD''Y$ è un triangolo rettangolo, l'asse di XD'' passa anche per il punto medio M di XY . Allo stesso modo l'asse di YD'' passa per C e per M . Quindi \widehat{AMC} è l'angolo tra gli assi di XD'' e YD'' ; dato che $XD'' \perp YD''$, allora $\widehat{AMC} = \frac{\pi}{2}$.

Problema 3

Per le relazioni tra radici e coefficienti, avremo che a, b, c saranno le tre radici del polinomio

$$x^3 - 6x^2 + 9x - p$$

dove $p = abc$.

Sostituendo $x = a$ si ottiene

$$a^3 - 6a^2 + 9a - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = a(a - 3)^2$$

e allo stesso modo

$$p = b(b - 3)^2, \quad p = c(c - 3)^2.$$

Supponiamo ora $p = 0$; allora o tutte le variabili sono uguali a 3 (assurdo perché devono essere distinte), oppure almeno una è uguale a 0. Supponiamo senza perdita di generalità $c = 0$.

In questo caso le condizioni iniziali si riscrivono così:

$$\begin{cases} a + b &= 6 \\ ab &= 9. \end{cases}$$

Questo sistema ha unica soluzione $a = b = 3$, assurdo perché le variabili sono distinte.

Se $p \neq 0$, abbiamo che a, b, c devono avere lo stesso segno, perché dalle uguaglianze

$$p = a(a - 3)^2 = b(b - 3)^2 = c(c - 3)^2$$

tutti e tre hanno lo stesso segno di p . Ma se per assurdo fossero tutti e tre negativi, allora $6 = a + b + c < 0$, assurdo.

Quindi $a, b, c > 0$, da cui anche $p > 0$.

Supponiamo ora $p = 4$. Si possono allora ricavare a, b, c trovando le radici del polinomio

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x - 1)^2(x - 4).$$

Quindi due variabili sono uguali a 1, assurdo.

Supponiamo infine $p > 4$, e risolviamo la disequazione

$$x^3 - 6x^2 + 9x > 4 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)^2(x - 4) > 0,$$

che deve essere soddisfatta da a, b, c , dal momento che sono le radici di $x^3 - 6x^2 + 9x - p$ con $p > 4$.

La soluzione è $x > 4$, quindi affinché $p > 4$ è necessario che $a, b, c > 4$. Ciò è ovviamente assurdo perché $6 = a + b + c > 12$.

In conclusione avremo che

$$0 < p < 4.$$