1. Problema 2

Scriviamo un numero intero n in base 2: chiamiamo

- *permanenze* (notazione $p(n)$) il numero di coppie di cifre consecutive uguali (il numero di configurazioni $\ldots 00 \ldots$ o $\ldots 11 \ldots$);
- *variazioni* (notazione $v(n)$) il numero di coppie di cifre consecutive diverse (il numero di configurazioni $\ldots 01 \ldots$ o $\ldots 10 \ldots$).

Per esempio, ponendo $n = 75$ la sua scrittura in base 2 è 1001011, dunque le permanenze sono 2, mentre le variazioni sono 4. Ovviamente il numero di permanenze più il numero di variazioni è pari al numero di cifre di n in base 2 meno 1.

Vogliamo ora dimostrare per induzione estesa che $a_n = p(n) - v(n)$.

Iniziamo a verificare il caso $n = 1$. Evidentemente si ha $p(1) = v(1) = 0$, e in effetti $a_1 = p(1) - v(1) = 0$.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per tutti i numeri da 1 fino a $n - 1$. Il numero $\lfloor n/2 \rfloor$ si ottiene da n eliminando l'ultima cifra nella scrittura in base 2, quindi per ipotesi induttiva $a_{\lfloor n/2 \rfloor} = p(\lfloor n/2 \rfloor) - v(\lfloor n/2 \rfloor)$. Per valutare l'addendo $\delta = (-1)^{n(n+1)/2}$ distinguiamo quattro casi:

- $n \equiv 0 \pmod 4$. In tal caso si ha $\delta = 1$. In base 2 il numero termina con $\ldots 00$, quindi contiene una permanenza in più del numero $\lfloor n/2 \rfloor$, ovvero $p(n) = p(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ e $v(n) = v(\lfloor n/2 \rfloor)$. Dalla formula ricorsiva si trova
$$\begin{aligned} a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + \delta &= p(\lfloor n/2 \rfloor) - v(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 = \\ &= [p(n) - 1] - v(n) + 1 = p(n) - v(n). \end{aligned}$$
- $n \equiv 3 \pmod 4$. Anche in questo caso si ha $\delta = 1$. In base 2 il numero termina con $\ldots 11$, quindi contiene una permanenza in più del numero $\lfloor n/2 \rfloor$, ovvero $p(n) = p(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ e $v(n) = v(\lfloor n/2 \rfloor)$. Dalla formula ricorsiva si trova
$$\begin{aligned} a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + \delta &= p(\lfloor n/2 \rfloor) - v(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 = \\ &= [p(n) - 1] - v(n) + 1 = p(n) - v(n). \end{aligned}$$
- $n \equiv 1 \pmod 4$. In tal caso si ha $\delta = -1$. In base 2 il numero termina con $\ldots 01$, quindi contiene una variazione in più del numero $\lfloor n/2 \rfloor$, ovvero $p(n) = p(\lfloor n/2 \rfloor)$ e $v(n) = v(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$. Dalla formula ricorsiva si trova
$$\begin{aligned} a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + \delta &= p(\lfloor n/2 \rfloor) - v(\lfloor n/2 \rfloor) - 1 = \\ &= p(n) - [v(n) - 1] - 1 = p(n) - v(n). \end{aligned}$$
- $n \equiv 2 \pmod 4$. Anche in questo caso si ha $\delta = -1$. In base 2 il numero termina con $\ldots 10$, quindi contiene una variazione in più del numero $\lfloor n/2 \rfloor$, ovvero $p(n) = p(\lfloor n/2 \rfloor)$ e $v(n) = v(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$. Dalla formula ricorsiva si trova
$$\begin{aligned} a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + \delta &= p(\lfloor n/2 \rfloor) - v(\lfloor n/2 \rfloor) - 1 = \\ &= p(n) - [v(n) - 1] - 1 = p(n) - v(n). \end{aligned}$$

Come abbiamo visto, in ogni caso si ottiene $a_n = p(n) - v(n)$.

Siamo ora interessati a cercare i numeri m tali che $2^k \leq m < 2^{k+1}$ e $a_m = 0$. Utilizzando la formula di cui sopra, dobbiamo avere $p(m) - v(m) = 0$. Come abbiamo notato all'inizio, se m scritto in base 2 ha c cifre, allora $p(m)+v(m) = c-1$. Se c è pari, $c-1$ è dispari e di conseguenza anche $p(m)+v(m)$ lo è. Questo significa che $p(m)-v(m)=p(m)+v(m)-2v(m)$ deve essere dispari, dunque non potrà mai essere 0. Allora non esiste nessun numero m con un numero pari di cifre in base 2 che soddisfa $a_m=0$. I numeri compresi fra 2^k e 2^{k+1} hanno $k+1$ cifre. Abbiamo trovato allora un primo risultato: se k è dispari, $n(k)=0$.

Supponiamo ora che k sia pari e consideriamo un numero m tale che $2^k \leq m < 2^{k+1}$. Il numero m ha $k+1$ cifre, dunque abbiamo k coppie di cifre consecutive. Affinchè $p(m)-v(m)$ sia 0 è necessario che $k/2$ coppie siano permanenze e $k/2$ siano variazioni. La prima cifra (quella più a sinistra) di m deve essere 1, quindi, una volta scelte quali coppie sono permanenze e quali sono variazioni, il numero m è determinato. Il numero di modi con cui si può fare tale scelta è

$$\binom{k}{k/2}.$$

Riassumendo,

$$n(k)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \equiv 1 \pmod 2 \\ \binom{k}{k/2} & \text{se} \quad k \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$n(k)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}k\right)\cdot\binom{k}{k/2}.$$