

Premetto che non ci ho pensato molto, potrebbero esserci alcuni errori decisivi. In tutti i casi la prova che propongo è assai poco elegante!

Beh, iniziamo!

Mostrerò che è sufficiente che sia $a_2 > 2b_1 + 2$, condizione abbondantemente soddisfatta.

Alcune osservazioni ovvie:

1. $\log_4 3 > \log_4 2 = \frac{1}{2}$

2. $3^x = 4^{x \log_4 3}$

Da 1 e 2 segue che $3^x > 4^{\frac{x}{2}}$ (assumiamo che $x > 0$).

$$a_{1000} > b_{999} \Leftrightarrow 3^{a_{999}} > 4^{b_{998}}$$

Dal momento che $3^{a_{999}} > 4^{\frac{a_{999}}{2}}$ sarà sufficiente mostrare che $a_{999} > 2b_{998}$.

In modo analogo, affinché sia

$$3^{a_{998}} > 2(4^{b_{997}}) = 4^{b_{997} + \frac{1}{2}}$$

basterà che $a_{998} > 2b_{997} + 1$, ovvero che

$$3^{a_{997}} > 2(4^{b_{996}}) + 1 = 4^{(b_{996} + \frac{1}{2})} + 1.$$

Ma, ancora, poiché

$$4^{b_{996} + 1} > 4^{(b_{996} + \frac{1}{2})} + 1$$

sarà sufficiente provare

$$a_{997} > 2(b_{996}) + 2.$$

Iterando l'argomento e tenendo conto del fatto che se $x > 0$, allora

$$4^{x+1} > 4^{x + \frac{1}{2}} + 2$$

si dovrebbe arrivare alla conclusione.

Spero di non avere fatto errori e di essere stato chiaro.

Ciao.