

# Algebra – Problemi di ammissione

1. Siano  $x, y, z$  numeri reali positivi tali che  $x + y + z = 3$ .

Dimostrare che

$$\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx).$$

2. Siano  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numeri reali *positivi* tali che

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1.$$

Dimostrare che

$$\frac{a_1}{1 - a_1} \cdot \frac{a_2}{1 - a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{1 - a_n} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}.$$

3. Determinare il massimo valore possibile per la somma ciclica

$$\sqrt{|a_1 - a_2|} + \sqrt{|a_2 - a_3|} + \dots + \sqrt{|a_{2008} - a_{2009}|} + \sqrt{|a_{2009} - a_1|},$$

dove gli  $a_i$  sono numeri reali tali che  $0 \leq a_i \leq 1$  per ogni  $i = 1, \dots, 2009$ .

# Combinatoria – Problemi di ammissione

1. Ad uno Stage Senior hanno partecipato 56 studenti. Durante lo stage si sono formate alcune *triadi*. Si sa che ogni triade contiene esattamente 3 studenti, e che 2 triadi diverse hanno al più un elemento in comune.

Dimostrare che gli organizzatori possono invitare al Winter Camp 11 dei partecipanti facendo in modo che nessuna triade sia convocata per intero.

2. (a) Un insieme  $X$  contiene  $n$  numeri *interi* distinti. Si sa che, comunque si scelga un elemento  $x \in X$ , l'insieme  $X \setminus \{x\}$  può essere partizionato in due sottoinsiemi in cui la somma degli elementi è la stessa (ma non è detto che i due sottoinsiemi abbiano lo stesso numero di elementi).

Determinare per quali interi positivi  $n$  la situazione è possibile.

- (b) Studiare lo stesso problema nel caso in cui  $X$  contenga numeri *reali* distinti.

3. Sia  $n$  un intero positivo. Un gruppo di  $n$  amici decide durante le vacanze di organizzare delle partite di pallavolo 4 contro 4, con le squadre che variano di volta in volta. Al termine della vacanza risulta che ogni coppia di amici si è trovata in campo in squadre avversarie esattamente una volta.

Determinare per quali interi positivi  $n$  la situazione è possibile.

# Geometria – Problemi di ammissione

1. Sia  $ABC$  un triangolo scaleno, e sia  $r$  la bisettrice *esterna* dell'angolo in  $B$ . Siano  $P$  e  $Q$  i piedi delle perpendicolari ad  $r$  condotte per  $A$  e  $C$ , rispettivamente. Sia  $M$  l'intersezione di  $CP$  e  $BA$ , e sia  $N$  l'intersezione di  $AQ$  e  $BC$ .

Dimostrare che  $MN$ ,  $AC$  ed  $r$  concorrono.

2. Sia  $ABC$  un triangolo, e siano  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  dei punti presi sui lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , rispettivamente.

(a) Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli  $AXZ$ ,  $BYX$ ,  $CZY$  passano per uno stesso punto.

(b) Detti  $A'$  il circocentro di  $AXZ$ ,  $B'$  il circocentro di  $BYX$ ,  $C'$  il circocentro di  $CZY$ , dimostrare che il triangolo  $A'B'C'$  è simile al triangolo  $ABC$ .

(c) Dimostrare che

$$\text{Area}(A'B'C') \geq \frac{1}{4} \text{Area}(ABC),$$

con uguaglianza se e solo se  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concorrono.

3. Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo. Sia  $E$  un punto del piano tale che  $E$  e  $B$  stanno in semipiani opposti rispetto ad  $AC$ . Sia  $D$  un punto interno al segmento  $AE$ .

Si sa che

$$\angle ADB = \angle CDE, \quad \angle BAD = \angle ECD, \quad \angle ACB = \angle EBA.$$

Dimostrare che  $E$  appartiene alla retta  $BC$ .

# Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Dimostrare che non esiste nessuna coppia  $(a, b)$  di numeri interi tale che

$$a^2 = b^7 + 7.$$

2. (a) Determinare tutti i polinomi  $p(x)$  a coefficienti interi tali che

$$\frac{p(a) + p(b) + p(c)}{a + b + c}$$

è un intero per ogni terna  $(a, b, c)$  di interi non negativi, non tutti simultaneamente nulli.

- (b) Stessa domanda ma considerando solo terne di interi positivi.
3. (a) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi  $n$  per cui  $n!$  non è multiplo di  $n^2 + 1$ .
- (b) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi  $n$  per cui  $n!$  è multiplo di  $n^2 + 1$ .