

Parte(1).

Iniziamo a considerare insiemi X di numeri interi la cui cardinalità sia n dispari.

Se $n=1,3 \Rightarrow$ facile. *(anche nei reali)*

Se $n=5$ allora $X=\{-3,-1,1,3,5\}$ soddisfa le ipotesi in quanto:

$$-3 + 3 = -1 + 1, \quad 5 - 3 - 1 = 1, \quad 5 - 3 = 3 - 1, \quad 5 + 1 - 3 = 3, \quad 1 + 3 = 5 - 1.$$

A questo punto si dimostra come si vuole per induzione che tutti i valori dispari ≥ 5 di n vanno bene.

Si rivela abbastanza rapido questo procedimento:

preso un insieme X di $2k-1$ elementi che soddisfa le ipotesi ed essendo S la somma dei valori assoluti dei suoi elementi, allora $Y = X \cup \{S, -S\}$ soddisfa le ipotesi.

Parte(2).

Dimostriamo che $|X|$ pari non va bene.

Prima però, facciamo la seguente osservazione: moltiplicando tutti gli elementi di X per un qualunque reale q si ottiene un'altra soluzione. Infatti, in ogni partizione la somma viene moltiplicata di un fattore q , non modificando l'uguaglianza.

Ciò ci permette di dividere gli elementi di X per l'MCM degli elementi non nulli.

Fatta questa operazione resterà almeno un elemento d dispari.

Se S è la somma degli elementi, allora $S-x$ pari per ogni x . Si arriva ad un assurdo.

N.B. Per questa dimostrazione non è necessario che gli elementi siano distinti.

Conclusione: Se X è un insieme di interi, allora vanno bene tutte e sole le cardinalità dispari ≥ 5 .

Parte(3). Ora arriva il bello.

$$(3.1) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Iniziamo dalla soluzione più banale: si imposta un sistema.

Considero che la tesi equivale a: è possibile cambiare il segno di alcuni elementi di $X/\{x_i\}$ in modo che la somma di tutti gli elementi sia 0, dove i numeri a cui non cambio il segno appartengono ad un insieme della partizione, e quelli a cui lo cambio all'altro.

L'insieme delle condizioni dà luogo al seguente sistema:

$$\pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n = 0$$

$$\pm x_1 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n = 0$$

...

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_{n-1} = 0$$

Che ha i coefficienti razionali. Se c'è qualche soluzione reale oltre a $(0,0,\dots,0)$, allora tutte le soluzioni sono infinite e risultano dalla combinazione lineare di alcuni parametri a cui si danno coefficienti razionali (basta procedere per sostituzione per trovarli).

Quindi si trova un insieme di interi.

$$(3.2) \quad \mathbb{R} \rightarrow \text{Hamel} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Tuttavia vogliamo l'eleganza e, pertanto, cercheremo qualcosa di più originale.

Si prende una base di Hamel ed un suo elemento a che serve per scrivere gli elementi dell'insieme.

Si trova un insieme di razionali, formato dai coefficienti di a nella scrittura degli elementi dell'insieme di reali.

$$(3.3) \quad \mathbb{R} \rightarrow \text{Hamel} \rightarrow \text{Base } 2b+1 \rightarrow \mathbb{Z}$$

A guardarlo sembra troppo semplice: si potrebbe provare a testare i virtuosismi della scrittura in base.

È un fatto noto (o è facile dimostrarlo) che tutti gli interi relativi si possono scrivere in modo unico in base $2b+1$ (b intero) come una n -upla di interi compresi tra $-b$ e b .

Allora ad ogni reale di X si associa una m -upla nella sua scrittura in base di Hamel (wlog coefficienti interi).

Questa m -upla definisce un intero scritto in base $2b+1$ (b abbastanza grande per non avere riporti, anche nelle somme, per comodità).

In queste due soluzioni l'uso di Hamel è suggerito dall'obiettivo di trovare una funzione dai reali agli interi che si comporti bene rispetto alla somma; la scrittura in base lo fa.

$$(3.4) \quad \mathbb{R} \rightarrow \text{parte intera}$$

Un altro modo di trovare facilmente degli interi è prendere la parte intera, che si comporta bene nella somma a meno di riporti della parte razionale.

Quindi proviamo a diminuire l'influenza di questa ricordando un Teorema di Dirichlet:

per ogni reale ϵ : esiste k intero ($0 < k \leq n+1$) tale che $\{k_i\} < 1/n$.

Usandolo un po' di volte (un elemento alla volta viene integrato e gli altri aggiustati bene grazie all'amicizia innata fra 2 e induzione) si arriva a moltiplicare tutti per:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n, \quad \text{con} \quad a_i < 1/n^{2^{k-i+1}}.$$

(3.5) Matrix tuttosubito

E se uno avesse poco spazio disponibile o poco inchiostro residuo?

La soluzione migliore in questo caso, che sistemerebbe in un colpo solo parte(2) e parte(3), sarebbe la seguente:

Il sistema di sopra, per avere infinite soluzioni, deve avere una matrice associata A con $\det A = 0$.

Se n pari $\det A \equiv 1 \pmod{2}$ perchè, mod 2, la matrice ha tanti 1 con una diagonale di zeri.

Formula: $\det A = \sum_{\sigma} \prod_i (-1)^{\sigma(i)} a_{i\sigma(i)} \equiv \sum_{\sigma} \prod_i a_{i\sigma(i)} = (\text{Inclusione-esclusione}) \sum_{\pm} \text{CBIN}(n,i)^*(n-i)! =$
 $= \sum n!/i! \equiv n!/n! \equiv 1 \pmod{2}.$

QED

Insegnamenti:

- Spesso si trovano assurdi ragionando sulla parità.
- Un sistema di equazioni lineari a coefficienti razionali ha soluzioni razionali
- Scrittura in base $2b+1$ con cifre tra $-b$ e b
- La scrittura in base si comporta bene rispetto alla somma (specialmente senza riporti)
- Lavorare sulle parti razionali deve far pensare al Teorema di Dirichlet
- 2 ed induzione vanno spesso a braccetto
- Un sistema lineare (n equazioni, n incognite) ha infinite soluzioni $\Rightarrow \det A = 0$
- La formula per il determinante.