

1 Testo del problema

Sia ABC un triangolo scaleno, e sia r la bisettrice esterna dell'angolo in B . Siano P e Q i piedi delle perpendicolari ad r condotte per A e C , rispettivamente. Sia M l'intersezione di CP e BA , e sia N l'intersezione di AQ e BC .

Dimostrare che MN , AC ed r concorrono.

2 Ciò di cui si potrebbe aver bisogno

2.1 Teorema di Desargues

Siano ABC e DEF due triangoli. AD , BE , CF concorrono se e solo se $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ sono allineati.

2.2 Teoremi sulle bisettrici

Sia ABC un triangolo, siano D il piede della bisettrice interna per B ed E il piede della bisettrice esterna per B . Allora

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

2.3 Teorema di Ceva

Sia ABC un triangolo e siano D , E , F punti sulle rette contenenti i lati opposti ad A , B , C rispettivamente. AD , BE , CF concorrono se e solo se

$$\frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} \frac{AF}{FB} = 1$$

dove i rapporti tra segmenti allineati sono da intendersi positivi se i segmenti sono orientati nello stesso senso e negativi in caso contrario.

2.4 Teorema di Menelao

Sia ABC un triangolo e siano D , E , F punti sulle rette contenenti i lati opposti ad A , B , C rispettivamente. D , E , F sono allineati se e solo se

$$\frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} \frac{AF}{FB} = -1$$

dove i rapporti tra segmenti allineati sono da intendersi positivi se i segmenti sono orientati nello stesso senso e negativi in caso contrario.

3 Soluzioni sintetiche

Un passo presente in quasi tutte le soluzioni sintetiche è quello di dimostrare che $X = AQ \cap PC$ giace sulla bisettrice interna di B . Ciò si fa ad esempio notando la similitudine tra $\triangle APB$ e $\triangle CQB$, quella tra $\triangle APX$ e $\triangle QCX$ e facendo opportune considerazioni sui rapporti tra segmenti, che per inverso di Talete o similitudini varie dà $BX//AP//QC$.

Dopodiché si può concludere in vari modi, ad esempio con Desargues sui triangoli $\triangle CNQ$ e $\triangle AMP$ ricordandosi che rette parallele concorrono all'infinito. Quest'affermazione ha senso, in quanto Desargues è un teorema di geometria proiettiva.

Se si dimostra che anche $MQ \cap PN$ si trova su BX si può applicare Desargues anche sui triangoli $\triangle AMQ$ e $\triangle CNP$, tuttavia questa ipotesi aggiuntiva allunga di parecchio la soluzione e non la si esaminerà in dettaglio.

Per concludere si può anche usare Menelao sulla retta per M , N e intersezione di r con AC , ricordandosi il teorema della bisettrice esterna e la concorrenza della bisettrice interna con AN e CM che forniscono i rapporti giusti tra segmenti con l'aiuto di Ceva.

Senza passare per il fatto citato all'inizio si possono considerare rapporti tra le lunghezze dei segmenti sulla retta r e con estremi B , P , Q , proiezioni di M ed N su r ed $AC \cap r$, $MN \cap r$; si dimostra infine che gli ultimi due punti coincidono.

4 Soluzioni analitiche

L'importante in una soluzione analitica è assegnare le coordinate in modo giusto per diminuire la quantità di calcoli necessaria. La disposizione migliore è probabilmente quella con B in origine, r sull'asse delle X , P in $(1; 0)$, Q in $(q; 0)$, con $q < 0$, equazione di $BA : y = ax$ e di $BC : y = -ax$.

5 Possibili errori

Attenzione: in questo problema non si possono usare affinità. Esse conservano sì i rapporti tra i segmenti, ma non gli angoli, quindi il termine bisettrice non ha più senso.