

PRESENTAZIONE DELLE SOLUZIONI DELL'ESERCIZIO NUMERO 1 DI ALGEBRA

Ho riscontrato due approcci principali al problema. Di seguito riporto la traccia di entrambe le tipologie di soluzione.

1. “AM-GM” (Arapì, Bresciani, Marconi, Racco, Salvatori, Tolomeo)

L'idea di base consiste nell'applicare la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica alle terne

$$\left(\frac{x^3}{y^3+8}, \frac{y+2}{27}, \frac{y^2-2y+4}{27} \right)$$

e cicliche¹. Si trova in tal modo

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2-2y+4}{27} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+8} \frac{y+2}{27} \frac{y^2-2y+4}{27}} = 3 \sqrt[3]{\frac{x^3}{3^6}} = \frac{x}{3}.$$

Sommando le tre disuguaglianze si arriva a

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left(\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2-2y+4}{27} \right) &= \sum_{cyc} \left(\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^2-y+6}{27} \right) = \\ &= \sum_{cyc} \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{\sum_{cyc} x^2 - \sum_{cyc} x + 18}{27} \geq \frac{\sum_{cyc} x}{3} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{(\sum_{cyc} x)^2 - 2 \sum_{cyc} xy + 18}{27} &\geq \frac{\sum_{cyc} x}{3} \\ \sum_{cyc} \frac{x^3}{y^3+8} &\geq -\frac{3^2+15}{27} + 1 + \frac{2}{27} \sum_{cyc} xy \\ \sum_{cyc} \frac{x^3}{y^3+8} &\geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27} \sum_{cyc} xy \end{aligned}$$

che è la tesi.

2. “1/3” (Bioletto, Borghese, Kuzmin, Paolini, Spigler, Stra)

L'idea di base è inserire il termine 1/3 come elemento separatore fra lhs e rhs. Cominciamo col dimostrare che

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx).$$

Ciò segue immediatamente dalla disuguaglianza di Mac Laurin in questo modo:

$$\sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \leq \frac{x + y + z}{3} = 1$$

$$xy + yz + zx \leq 3$$

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx) \leq \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3},$$

¹Ricordarsi di dimostrare che tutti e tre i termini sono positivi.

oppure si può ricavare con la disuguaglianza fra media aritmetica e media quadratica:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx) &= \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \left(\left(\sum_{cyc} x \right)^2 - \sum_{cyc} x^2 \right) = \\
 &= \frac{4}{9} - \frac{1}{27} \sum_{cyc} x^2 \geq \\
 &\geq \frac{4}{9} - \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} \left(\sum_{cyc} x \right)^2 = \\
 &= \frac{4}{9} - \frac{1}{81} \cdot 9 = \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Passiamo ora alla prima disuguaglianza. Il primo passo consiste nel dire che

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{y^3 + 8} \geq \sum_{cyc} \frac{x^3}{x^3 + 8}$$

per la disuguaglianza di riarrangiamento e ridursi quindi a dover dimostrare

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{x^3 + 8} \geq \frac{1}{3}.$$

Dopo di che sono possibili tre approcci: Jensen (Bioletto, Borghese, Spigler, Stra), Lagrange (Paolini), HM-GM (Kuzmin).

2.1. Jensen. Supponiamo che uno tra x , y e z sia maggiore di $\sqrt[3]{4}$. Allora

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{x^3 + 8} \geq \frac{\sqrt[3]{4}^3}{\sqrt[3]{4}^3 + 8} = \frac{4}{4 + 8} = \frac{1}{3}.$$

Supponiamo allora che $(x, y, z) \in [0, \sqrt[3]{4}]^3$. Studiando la derivata seconda della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 8}$$

troviamo

$$f''(x) = 96 \frac{4x - x^4}{(x^3 + 8)^3}$$

e scopriamo che nell'intervallo $[0, \sqrt[3]{4}]$ è sempre positiva. Questo significa che la funzione $f(x)$ è convessa. Dalla disuguaglianza di Jensen, pertanto, segue

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{x^3 + 8} = f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = 3f(1) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

2.2. Lagrange. Riscriviamo la disuguaglianza come

$$3 - \sum_{cyc} \frac{8}{x^3 + 8} \geq \frac{1}{3}$$

ovvero

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + 8} \leq \frac{1}{3}.$$

Consideriamo il dominio chiuso $(x, y, z) \in [0, 3]^3$ e sia

$$f(x, y, z) = \sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + 8}$$

la funzione da massimizzare nel dominio e

$$g(x, y, z) = x + y + z - 3$$

il vincolo. La funzione lagrangiana è allora

$$\Lambda(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = \left(\frac{1}{x^3 + 8} + \frac{1}{y^3 + 8} + \frac{1}{z^3 + 8} \right) + \lambda(x + y + z - 3).$$

Uguagliando a 0 le sue derivate parziali si trova il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -\frac{3x^2}{(x^3+8)^2} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = -\frac{3y^2}{(y^3+8)^2} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = -\frac{3z^2}{(z^3+8)^2} + \lambda = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si trova

$$\frac{3x^2}{(x^3+8)^2} = \frac{3y^2}{(y^3+8)^2}.$$

Dal momento che x e y sono positivi, possiamo estrarre la radice quadrata da entrambi i lati e trovare

$$\frac{x}{x^3+8} = \frac{y}{y^3+8},$$

da cui

$$(x - y)[xy(x + y) - 8] = 0.$$

Per AM-GM

$$xy(x + y) \leq \left(\frac{(x + y)}{2} \right)^2 (x + y) = \frac{1}{4}(x + y)^3 \leq \frac{3^3}{4} = \frac{27}{4} < 8,$$

dunque necessariamente $x = y$. Analogamente si ha $x = y = z = 1$. In tal caso

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Dobbiamo ora trovare il massimo sui bordi. A questo scopo, poniamo wlog $z = 0$. Risolvendo nuovamente il sistema risultante (che è il medesimo) si trova $x = y = \frac{3}{2}$, quindi

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 8} = \frac{219}{728} < \frac{1}{3}.$$

Infine, rimangono da controllare i vertici del dominio. Poniamo $x = 3$ e $y = z = 0$. Allora

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{3^3 + 8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{39}{140} < \frac{1}{3}.$$

2.3. “HM-GM” (Kuzmin). Partendo da

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3 + 8} \leq \frac{1}{3},$$

moltiplicando per 9 si ha

$$\sum_{cyc} \frac{9}{x^3 + 8} \leq 3.$$

Per HM-GM si ha

$$\sum_{cyc} \frac{9}{x^3 + 8 \cdot 1} \leq \sum_{cyc} \sqrt[9]{x^3 \cdot 1^8} = \sum_{cyc} \sqrt[9]{x}.$$

Resta dunque da dimostrare che

$$\sum_{cyc} \sqrt[9]{x} \leq 3,$$

ovvero

$$\frac{\sqrt[9]{x} + \sqrt[9]{y} + \sqrt[9]{z}}{3} \leq 1 = \sqrt[3]{\frac{x + y + z}{3}},$$

la quale è vera per AM-QM.