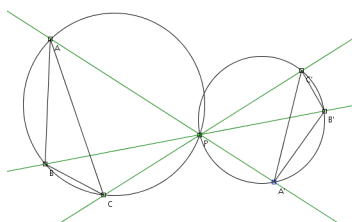


# Relazione G2

Andrea

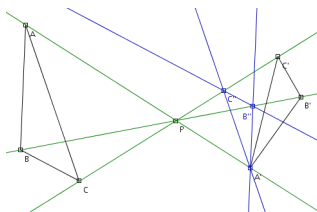
26 gennaio 2009



Prendiamo due circonferenze che si intersecano in un punto  $P$ . Prendiamo tre punti  $A, B, C$  su una circonferenza e proiettiamoli, attraverso  $P$ , sulla seconda circonferenza, ottenendo  $A', B', C'$ . Possiamo osservare che i triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$ , per semplici questioni di angoli, sono simili. Inoltre sono anche triangoli prospettici, nel senso che  $AA', BB', CC'$  concorrono. (per il teorema di Desargues, questo è equivalente a dire che  $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$  sono allineati)

Ci chiediamo: è questo l'unico modo per ottenere una coppia di triangoli simili e prospettici? Nel senso, è vero che se  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono simili e prospettici da  $P$ , allora  $P$  sta su entrambe le circonferenze circoscritte?

Questa tesi è falsa: basta prendere due triangoli simili con i lati a due a due paralleli. Allora è chiaro che in ogni caso sono, oltre che simili, anche prospettici. Però, se aggiungiamo la condizione che i triangoli non siano omotetici (=con i lati a due a due paralleli), il claim sopra citato funziona, ed ora lo dimostriamo.

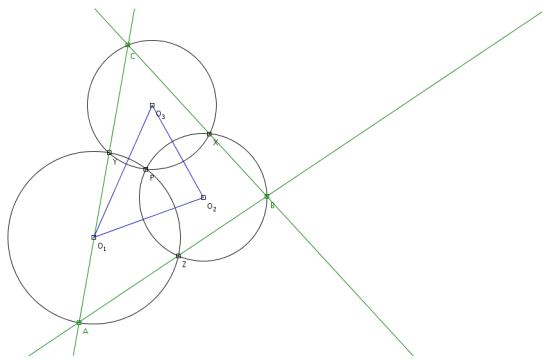


Quindi, siano  $ABC$  ed  $A'B'C'$  due triangoli simili prospettici non omotetici. Per sfruttare meglio l'ipotesi che non sono omotetici, avviciniamo  $ABC$ , scegliendo un vertice (tipo  $A'$ ) e costruendo l'omotetico di  $ABC$  di centro  $P$  passante per  $A'$ . Gli altri vertici di questo omotetico chiamiamoli  $B'', C''$ . Ora abbiamo le stesse ipotesi di prima ( $A'B'C'$  ed  $A''B''C''$  sono simili, prospettici, non omotetici), con l'ipotesi in più che due vertici coincidono ( $A'' = A$ ). Basterebbe dimostrare che  $P$  sta sulla circonferenza circoscritta ad uno dei due triangoli. Lo dimostriamo in due modi.

Primo modo. Consideriamo la funzione che manda ogni punto  $P$  nel punto  $P'$  tale che  $APP'$  sia (direttamente) simile ad  $ABC$ . Ad esempio, manda  $B'$  in  $C'$  e  $B''$  in  $C''$ . Visto che è la

composizione di rotazione e omotetia, manda rette in rette, quindi manda la retta  $B'B''$  nella retta  $C'C''$  (qui usiamo l'ipotesi che i triangoli non erano prospettivi). Quindi l'angolo tra queste due rette è proprio l'angolo di rotazione. Quindi  $\angle B'PC' = \angle BAC = \angle B'AC'$ ! Quindi  $PA'B'C'$  è ciclico e la dimostrazione è conclusa.

Secondo modo (più classico). Siccome  $A'B' : A'C' = A'B'' : A'C''$  e  $\angle B'A'B'' = \angle C'A'C''$ , i triangoli  $B'A'B''$  e  $C'A'C''$  sono simili. Quindi  $\angle C''C'A' = \angle B''B'A'$ , o meglio  $PC'A' = PB'A'$ , da cui la tesi. Il secondo lemma si potrebbe riassumere in: questa figura esiste. Ci sono tre

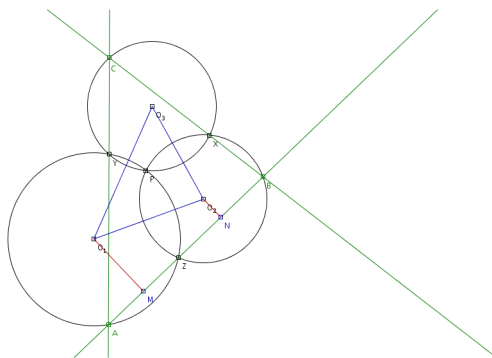


circonferenze passanti per un punto  $P$ , e si intersecano a due a due anche nei punti  $X, Y, Z$ , e hanno centri  $O_1, O_2, O_3$ . Prendiamo un punto  $A$  sulla prima circonferenza, lo proiettiamo sulla seconda attraverso  $Z$  ottenendo  $B$ , proiettiamo  $B$  sulla terza attraverso  $X$  ottenendo  $C$ , proiettiamo  $C$  sulla prima attraverso  $Y$ ... e dovremmo ottenere di nuovo  $A$ .

Il motivo per cui la figura esiste è il seguente: le circonferenze concorrono in  $P$ , e possiamo scrivere  $\angle XPY + \angle YPZ + \angle ZPX = 2\pi$ . Possiamo riscrivere questo come  $(\pi - \angle XPY) + (\pi - \angle YPZ) + (\pi - \angle ZPX) = \pi$ . Per il fatto che  $A, B, C$  stanno sulle circonferenze,  $\angle XCY = \pi - \angle XPY$ . L'uguaglianza diventa  $\angle XCY + \angle YAZ + \angle ZBX = \pi$ , che ci dice che la somma degli angoli interni di  $ABC$  è  $\pi$ . Questo ragionamento, fatto un po' meglio, porta ad una dimostrazione del lemma.

Inoltre possiamo osservare che, da qualunque vertice  $A$  partiamo per la costruzione, il triangolo  $ABC$  sarà sempre simile ad  $O_1O_2O_3$ . Anche questo è dovuto a semplici osservazioni riguardo gli angoli.

Ci chiediamo: qual è il rapporto di similitudine tra  $ABC$  ed  $O_1O_2O_3$ ? C'è un modo semplice per esprimerlo? Costruiamo  $M, N$ , punti medi delle corde  $AZ, ZB$ . Siccome queste sono corde,



possiamo dire anche che  $M$  è la proiezione di  $O_1$  su  $AB$ , ed  $N$  è la proiezione di  $O_2$  su  $AB$ . Insomma,  $MN$  è la proiezione di  $O_1O_2$  su  $AB$ , quindi  $MN = O_1O_2 \cdot \cos \alpha$ , dove  $\alpha$  è l'angolo

di inclinazione tra le rette  $O_1O_2$  e  $AB$ . Ma siccome  $M, N$  sono punti medi, concludiamo che  $AB = 2MN$ , quindi infine  $AB = 2O_1O_2 \cdot \cos \alpha$ .

Il rapporto di similitudine tra  $ABC$  ed  $O_1O_2O_3$  è due volte il coseno dell'angolo di inclinazione di questi due triangoli.  $ABC$  sarà più grande possibile quando il coseno è 1, cioè quando  $AB, BC, CA$  sono parallele ad  $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1$ .

Detto tutto questo, diventa abbastanza banale risolvere il problema G2:

Sia  $ABC$  un triangolo, e siano  $X, Y, Z$  dei punti presi sui lati  $AB, BC, CA$  rispettivamente.

1. Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli  $AXZ, BYX, CZY$  passano per uno stesso punto.
2. Detti  $A', B', C'$  i loro circocentri, dimostrare che  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono simili.
3. Dimostrare che  $Area(A'B'C') \geq \frac{1}{4}Area(ABC)$ .
4. Dimostrare che l'uguaglianza vale se e solo se  $AA', BB', CC'$  concorrono.