

Soluzione esercizio A3

Si può dimostrare in vari modi, tutti più o meno simili, che esistono sempre tre elementi a_{i-1}, a_i, a_{i+1} tali che $a_{i-1} \leq a_i \leq a_{i+1}$ oppure $a_{i-1} \geq a_i \geq a_{i+1}$.

I vari metodi includono un ragionamento per assurdo, l'utilizzo di insiemi A, B per dividere i casi $a_i \geq a_{i+1}$ dai casi $a_i \leq a_{i+1}$ e concludere con Pidgeonhole, o infine sfruttare la necessaria caduta di due elementi consecutivi in uno solo degli intervalli che tagliano a metà $[0, 1]$.

Se esistono tre elementi con tali proprietà, si avrà per forza $|a_i - a_{i-1}| + |a_{i+1} - a_i| \leq 1$, da cui con AM-QM si ottiene $\sqrt{|a_i - a_{i-1}|} + \sqrt{|a_{i+1} - a_i|} \leq \sqrt{2}$, che sono due degli elementi della nostra sommatoria.

Ovviamente $\sqrt{|a_{j+1} - a_j|} \leq 1$, quindi gli altri 2007 termini della somma possono arrivare al massimo a 2007, da cui non possiamo superare il $2007 + \sqrt{2}$, che è ottenibile con una combinazione banale (zeri e uni alternati fino ad a_{2008} , seguiti infine da $\frac{1}{2}$).