PROBLEMA N2:

Lemmi utili

1) se p é un polinomio a coefficienti interi, allora $x - y | p(x) - p(y)$ con x e y interi. Nota Bene: questo é uno dei pochi modi sensati in cui si puó usare l'ipotesi che il polinomio é a coefficienti interi...

2) se un polinomio p(x) ha infinite radici, allora p(x) é il polinomio nullo. Esistono "generalizzazioni" di questo fatto per polinomi a piú variabili (tra cui il celeberrimo Combinatorial Nullstellensatz) che non é difficile dimostrare per induzione.

Approcci possibili:

$a + b + c | p(a) - p(-b - c)$ (per il lemma uno) quindi il problema si riduce a $a + b + c | p(-b - c) + p(b) + p(c)$ cioé $p(-b - c) + p(b) + p(c) = 0$ che é una funzionale che si risolve facilmente (non capita tutti i giorni di avere l'ipotesi che f sia un polinomio...).

Un altro approccio possibile é questo:

PASSO 1) potremmo dire che se $p(\alpha) = 0$ allora, ponendo $a = -2\alpha$, $b = \alpha$ e $c = \alpha$, allora $a + b + c = 0$, quindi siccome $a + b + c | p(a) + p(b) + p(c)$ allora $p(a) + p(b) + p(c) = 0$, quindi $p(-2\alpha) = 0$ per cui per ogni k, $(-2)^k \alpha$ é una radice, per cui, a meno che $\alpha = 0$, p ha infinite radici, assurdo.

PASSO 2) ci rendiamo conto che il PASSO 1) non é molto formale (cioé prenderebbe grossomodo ϵ punti in una gara)

PASSO 3) ci accorgiamo che peró, se ragioniamo modulo un primo scelto accuratamente, il ragionamento del passo 1 funziona a perfezione...

Riconosco che il secondo approccio non porta direttamente a una conclusione (si arriva solo a dire $p(x) = cx^k$ ma resta da dimostrare che k=1, che peró non é troppo difficile) ma mi é sembrato interessante.