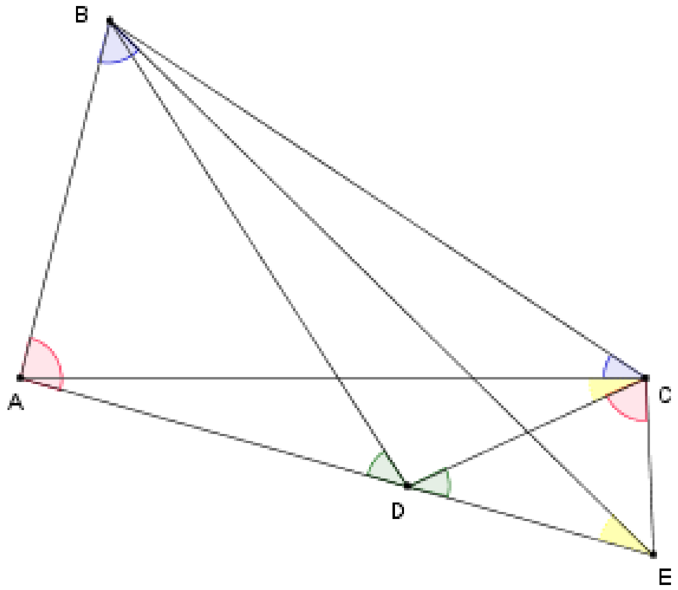
Davide Racco Anno 5^o – Liceo Scientifico "Tassoni"– Modena

Testo del problema G3

Sia ABC un triangolo acutangolo. Sia E un punto del piano tale che E e B stanno in semipiani opposti rispetto ad AC. Sia D un punto interno al segmento AE. Si sa che $\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$, $\widehat{BAD} = \widehat{ECD}$, $\widehat{ACB} = \widehat{EBA}$. Dimostrare che E appartiene alla retta BC. □

Soluzione



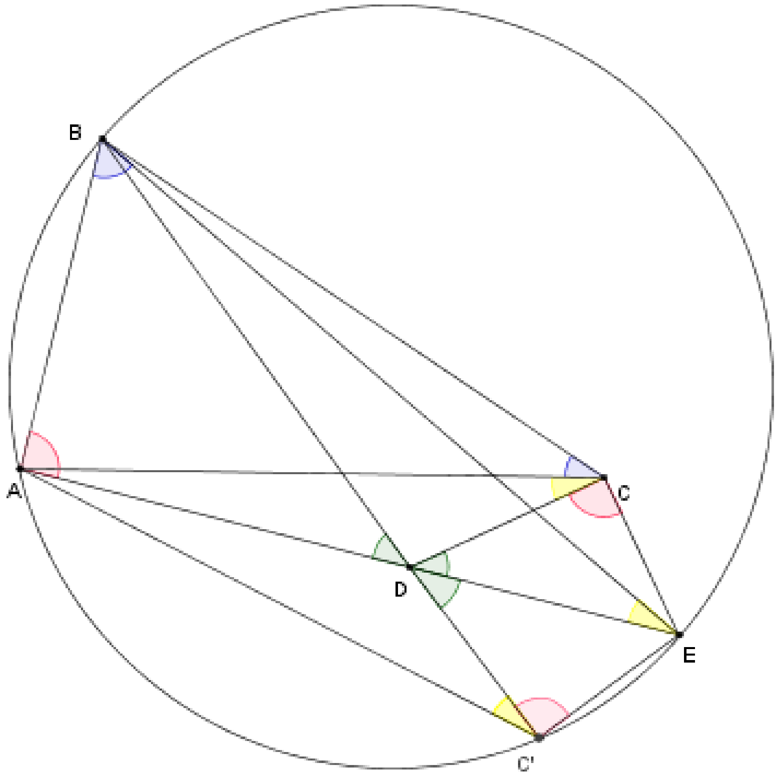
L'idea fondamentale è quella di dimostrare che B, C, E sono allineati dimostrando che $\widehat{BCE} = \pi$.

Il modo più semplice per farlo è dimostrare per *angle chasing* che $\widehat{BCE}$ è uguale alla somma degli angoli del triangolo $\triangle ABE$.

L'unica congruenza mancante dalle ipotesi è $\widehat{BED} = \widehat{ACD}$; si può dimostrare in maniera semplice in due modi:

- Dalle ipotesi $\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$ e $\widehat{BAD} = \widehat{ECD}$ segue che $\triangle ADB \sim \triangle CDE$, e in particolare
$$\frac{BD}{ED} = \frac{AD}{CD}$$
Da questa proporzione e dalla congruenza $\widehat{BDE} = \widehat{ADC}$ si ha che $\triangle BDE \sim \triangle ADC$, da cui $\widehat{BED} = \widehat{ACD}$ e quindi la tesi.

- Costruiamo il punto C', simmetrico di C rispetto ad AE.



Abbiamo che $\widehat{ADB} = \widehat{CDE} = \widehat{C'DE}$ per ipotesi e simmetria, dunque B, D, C' sono allineati. Inoltre $\widehat{BAD} = \widehat{ECD} = \widehat{EC'D}$, quindi $BACE'$ è ciclico, poichè i due angoli $\widehat{BAD}$ e $\widehat{EC'D}$ giacciono nello stesso semipiano rispetto a BE. Perciò $\widehat{AEB} = \widehat{AC'B} = \widehat{ACD}$, da cui segue la tesi.