

Problema 1. Dati interi positivi a_1, \dots, a_k , sia $n = \sum_{i=1}^k a_i$, e sia $\binom{n}{a_1, \dots, a_k}$

il coefficiente multinomiale $\frac{n!}{\prod_{i=1}^k (a_i!)}$.

Sia $d = \gcd(a_1, \dots, a_k)$ il massimo comun divisore di a_1, \dots, a_k . Provare che $\frac{d}{n} \binom{n}{a_1, \dots, a_k}$ è intero.

Problema 2. Un insieme S di punti dello spazio soddisfa la proprietà che le distanze tra le coppie di punti di S sono tutte distinte. Sapendo che i punti di S hanno coordinate intere (x, y, z) , dove $1 \leq x, y, z \leq n$, mostrare che il numero di punti in S è minore di $\min\left((n+2)\sqrt{n/3}, n\sqrt{6}\right)$.

Problema 3. Dati nel piano quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 , a tre a tre non allineati, tali che

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3,$$

indichiamo con O_i il circocentro di $\Delta A_j A_k A_\ell$, con $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Supponendo che $A_i \neq O_i$ per tutti gli indici i , dimostrare che le quattro rette $A_i O_i$ sono concorrenti o parallele.

Problema 4. Dato un insieme finito X di interi positivi (distinti), sia

$$\Sigma(X) = \sum_{x \in X} \arctan \frac{1}{x}.$$

Dato un insieme finito S di interi positivi tale che $\Sigma(S) < \frac{\pi}{2}$, mostrare che esiste almeno un insieme finito T di interi positivi tale che

$$S \subset T \text{ e } \Sigma(T) = \frac{\pi}{2}.$$

Ogni problema vale 7 punti.

La durata della gara è di 5 ore.