Mercoledì 15 luglio 2009

Problema 1. Sia n un intero positivo e siano $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ interi distinti nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ tali che n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$ per $i = 1, \ldots, k-1$. Dimostrare che n non divide $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Sia ABC un triangolo con circocentro O. Siano P e Q punti interni ai lati CA e AB rispettivamente. Siano K, L e M i punti medi dei segmenti BP, CQ e PQ rispettivamente, e sia Γ la circonferenza passante per K, L e M. Supponiamo che la retta PQ sia tangente alla circonferenza Γ. Dimostrare che $OP = OQ$.

Problema 3. Sia $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una successione strettamente crescente di interi positivi tale che le sottosuccessioni

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{e} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

siano entrambe progressioni aritmetiche. Dimostrare che la successione $s_1, s_2, s_3, \ldots$ è anch'essa una progressione aritmetica.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Giovedì 16 luglio 2009

Problema 4. Sia ABC un triangolo con $AB = AC$. Le bisettrici di $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$ intersecano i lati BC e CA in D ed E rispettivamente. Sia K l'incentro del triangolo ADC. Supponiamo che $\widehat{BEK} = 45°$. Determinare tutti i possibili valori di $\widehat{CAB}$.

Problema 5. Determinare tutte le funzioni f dall'insieme degli interi positivi all'insieme degli interi positivi tali che, per tutti gli interi positivi a e b, esiste un triangolo non degenere i cui lati hanno lunghezze

$$a, \; f(b) \;\text{ e }\; f(b + f(a) - 1).$$

(Un triangolo è *non degenere* se i suoi vertici non sono allineati.)

Problema 6. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ interi positivi distinti e sia M un insieme di $n-1$ interi positivi non contenente $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Una cavalletta deve fare dei salti lungo la retta reale. Partendo dal punto 0, deve effettuare n salti verso destra di lunghezze $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in un ordine a sua scelta. Dimostrare che la cavalletta può scegliere l'ordine dei suoi salti in modo tale da non cadere mai in un punto di M.