

Valutare $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^i}$

Considero la funzione:

$$f(k, n) = \sum_{i=1}^k i^n \cdot 2^{k-i}$$

Inizio analizzando $f(k, 1)$:

$$f(k, 1) = \sum_{i=1}^k i \cdot 2^{k-i}$$

Prima di tutto trovo la formula per $f(k+1, 1) - f(k, 1)$ che poichè le potenze di 2 nelle sommatorie hanno i coefficienti uno il consecutivo dell'altro equivale a:

$$\sum_{i=0}^k 2^{k-i} = \sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$$

L'ultima uguaglianza è un lemma noto (dimostrabile moltiplicando la sommatoria per (2-1)). Ora esprimo $f(k, 1)$ come:

$$f(k, 1) = f(2, 1) - f(1, 1) + f(3, 1) - f(2, 1) + f(4, 1) - f(3, 1) + \dots + f(k, 1) - f(k-1, 1)$$

Sfruttando l'uguaglianza precedente riscrivo come:

$$f(k, 1) = \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i+1} - 1 = -2^1 - 2^0 - (k-1) + \sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - k - 2$$

Ora che ho ottenuto la formula chiusa quello che mi interessa analizzare per i punti successivi della dimostrazione è che questa è nella forma

$$f(k, 1) = a_1 2^k + p_1(k)$$

con a_n un intero dipendente da n e p_n una funzione polinomiale di grado finito dipendente da n .

Valuto più in generale la differenza tra $f(k+1, n)$ e $f(k, n)$:

$$f(k+1, n) - f(k, n) = \sum_{i=0}^k ((i+1)^n - i^n) 2^{k-i}$$

questo perchè considerando i coefficienti delle potenze di 2 delle 2 funzioni essi sono sempre due n -esime potenze consecutive dell'esponente di 2. Ora sfrutto il binomio di Newton per riscrivere la precedente sommatoria come:

$$\sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} i^j \right) 2^{k-i}$$

Svolgo la sommatoria ottenendo:

$$\sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} i^j \right) 2^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{0} i^0 \cdot 2^{k-i} + \binom{n}{1} i^1 \cdot 2^{k-i} + \binom{n}{2} i^2 \cdot 2^{k-i} + \dots + \binom{n}{n-1} i^{n-1} \cdot 2^{k-i}$$

Ora assumo che $0^0 = 1$ (identità che serve per la coerenza del binomio di Newton usato prima) e sfrutto la definizione di f e trasformo la sommatoria precedente in:

$$2^{k+1} - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} f(k, i)$$

Chiamo $g(k, n)$ l'ultima sommatoria ottenuta. Per ragionamenti simili a quelli per il caso $n=1$ ottengo:

$$f(k, n) = \sum_{i=1}^{k-1} g(i, n)$$

Ora effettuo un'induzione su n per dimostrare che $f(k, n)$ è sempre nella forma $a_n 2^k + p_n(k)$ e che $a_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i$ con $a_1 = 2$:

Passo base: è il caso $n=1$ già analizzato in precedenza e soddisfa quanto richiesto.

Passo induttivo: Analizzo $g(k, n)$; se $f(k, z)$ con z minore di n è sempre in quella forma ne deriva direttamente, svolgendo i calcoli che lo è anche $g(k, n)$ (considerando costanti e polinomi differenti però) dato che:

$$\begin{aligned} g(k, n) &= 2^{k+1} - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i 2^k + p_i(k) = 2^{k+1} - 1 + 2^k \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(k) = \\ &= \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i \right) 2^k + \left(-1 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(k) \right) \end{aligned}$$

Ora posso assumere: $g(k, n) = b_n 2^k + q_n(k)$ con ovvio significato delle nuove variabili.

Sostituendo con l'ultimo lemma nell'uguaglianza ricavata prima ottengo:

$$f(k, n) = \sum_{i=1}^{k-1} g(i, n) = \sum_{i=1}^{k-1} b_n 2^i + q_n(i) = b_n 2^k + \left(-b_n + \sum_{i=1}^{k-1} q_n(i) \right)$$

Da quest'ultima uguaglianza concludo anche l'induzione notando che:

$$a_n = b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i$$

Tornando all'espressione che il problema chiede di valutare faccio il minimo comune multiplo tra tutti gli elementi della sommatoria ottenendo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k i^n \cdot 2^{k-i}}{2^k}$$

Noto che al numeratore figura $f(k,n)$ e quindi sostituisco:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_n 2^k + p_n(k)}{2^k}$$

Da qui si conclude sfruttando i limiti secondo cui:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n + \frac{p_n(k)}{2^k} = a_n$$

perchè una funzione polinomiale finita ha sempre ordine di infinito minore di una esponenziale. Quindi la funzione ricorsiva che restituisce il valore della sommatoria infinita con parametro n è:

$$a_1 = 2$$

$$a_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i$$

La funzione a_n restituisce come primi valori: 2, 6, 26, 150, 1082, 9366, 94586.