

Algebra – Problemi di ammissione

1. Per ogni intero positivo n , poniamo

$$f(n) = n + \max \{m \in \mathbb{N} : 2^{2^m} \leq n2^n\}.$$

Determinare l'immagine della funzione f .

2. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Dimostrare che

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}.$$

3. Sia $n > 3$ un numero intero. Determinare la più grande costante a_n e la più piccola costante b_n tali che

$$a_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}} \leq b_n,$$

per ogni n -upla di numeri reali positivi (x_1, \dots, x_n) . Si intende che nella sommatoria gli indici sono pensati modulo n .

Combinatoria – Problemi di ammissione

1. Alberto e Barbara hanno inventato il seguente gioco. All'inizio ci sono 2009 pile di monete, che indichiamo con P_1, \dots, P_{2009} . Ad ogni mossa ogni giocatore sceglie una pila P_i non vuota e sposta un certo numero di monete a sua scelta (almeno una, al massimo tutte) da P_i a P_{i-1} . Se la pila prescelta è la P_1 , allora le monete scelte vengono eliminate dal gioco. Alberto è il primo a giocare, poi i giocatori muovono a turno. Chi non ha più mosse valide perde.

All'inizio la pila P_i contiene i monete per ogni $i = 1, \dots, 2008$, mentre la pila 2009 contiene k monete.

Determinare per quali valori di k Alberto ha una strategia vincente.

2. Sulla lavagna è stato scritto un numero reale r . Ad ogni passaggio è possibile scegliere un numero x tra quelli scritti, cancellarlo, e sostituirlo con due numeri a e b tali che $2x^2 = ab$. Partendo dal numero r scritto all'inizio, ed operando $k^2 - 1$ volte nel modo indicato, si termina con k^2 numeri scritti, non necessariamente tutti distinti.

Dimostrare che almeno uno di tali numeri è minore od uguale di kr .

3. Gli elementi di una matrice $n \times m$ sono numeri interi. Una *operazione* consiste nell'aggiungere un intero a propria scelta a tutti gli elementi di una stessa riga o di una stessa colonna. Si sa che per infiniti interi k è possibile, facendo un numero finito di operazioni a partire dalla configurazione iniziale, ottenere una matrice i cui elementi sono tutti multipli di k .

Dimostrare che, con un numero finito di operazioni, è possibile ottenere anche la matrice nulla (quella con tutti gli elementi uguali a zero).

Geometria – Problemi di ammissione

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso, e siano P e Q due punti interni ad esso. Supponiamo che i quadrilateri $ADQP$ e $BCQP$ siano ciclici. Supponiamo inoltre che esista un punto E appartenente al segmento PQ tale che

$$\angle PBE = \angle QCE, \quad \angle PAE = \angle QDE.$$

- (a) Sia F l'ulteriore intersezione tra la retta BC e la circonferenza circoscritta al triangolo ECQ .

Dimostrare che la retta EF è parallela a BP .

- (b) Dimostrare che il quadrilatero $ABCD$ è ciclico.

2. Sia $ABCD$ un trapezio con lati paralleli AB e CD . Sia E un punto sul prolungamento del segmento BC dalla parte di C , e sia F un punto sul segmento AD tali che $\angle EAD = \angle FBC$. La retta EF incontra la retta CD in I e incontra la retta AB in J . Sia K il punto medio di EF , che supponiamo non appartenere alla retta CD .

Dimostrare che il quadrilatero $ABIK$ è ciclico se e solo se il quadrilatero $CDJK$ è ciclico.

3. Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 si intersecano in due punti distinti A e B , e sono tangenti internamente ad una terza circonferenza Γ nei punti D ed E , rispettivamente. Sia C uno dei punti di intersezione tra la retta AB e Γ . La circonferenza Γ_1 incontra nuovamente la retta DC in F e la retta DE in H . La circonferenza Γ_2 incontra nuovamente la retta EC in G e la retta ED in I .

Dimostrare che il quadrilatero $FGHI$ è ciclico.

Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Trovare tutte le soluzioni intere positive dell'equazione

$$n = \phi(n) + 402,$$

dove ϕ indica la funzione di Eulero.

2. Siano a ed n due numeri interi maggiori di 1 e tali che n divide $(a-1)^k$ per un qualche $k \geq 2$.

Dimostrare che n divide

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da $a_1 = 1$ e

$$a_{2k} = a_k + 1, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}} \quad \forall k \geq 1.$$

- (a) Determinare se ci sono numeri che compaiono più volte nella successione.
(b) Determinare l'immagine della successione.