

Cesenatico 1989 - Soluzioni

1. Dire se l'equazione $x^2 + xy + y^2 = 2$ ammette soluzioni (x, y) con x e y entrambi razionali.

Soluzione Cercare le soluzioni razionali di $x^2 + xy + y^2 = 2$ equivale a cercare le soluzioni intere di $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2$, con $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$ e $b, d \neq 0$, da cui $a^2d^2 + abcd = b^2c^2$. In base alle ipotesi precedenti e tenendo conto che l'equazione è simmetrica rispetto a a e d , e rispetto a b e c si possono considerare solamente due casi:

- $2|a, b, c, d$ sono tutti dispari, ciò è assurdo perchè l'LHS sarebbe pari mentre l'RHS sarebbe dispari.
- $2|a, 2 \nmid b$ e $2 \nmid c, 2|d$, anche quest'ipotesi è da scartare per lo stesso motivo
- $2 \nmid a, 2 \nmid d, 2|b, 2|c$, anche quest'ipotesi è da scartare per un motivo analogo
- $2|a, 2|b$, allora, ponendo $a = 2\alpha$ e $b = 2\beta$, si ha $4\alpha^2d^2 + 4\alpha\beta cd = 4\beta^2c^2$, $\alpha^2d^2 + \alpha\beta cd = \beta^2c^2$. Questo è un chiaro esempio di discesa infinita, perciò l'unica soluzione è $(0, 0, 0, 0)$ che non è accettabile viste le ipotesi fatte in partenza.

2. In una tavola circolare ci sono 60 posti occupati da 30 uomini e dalle 30 rispettive mogli. Mostrare che esistono almeno due signore che siedono alla stessa distanza dai rispettivi mariti.

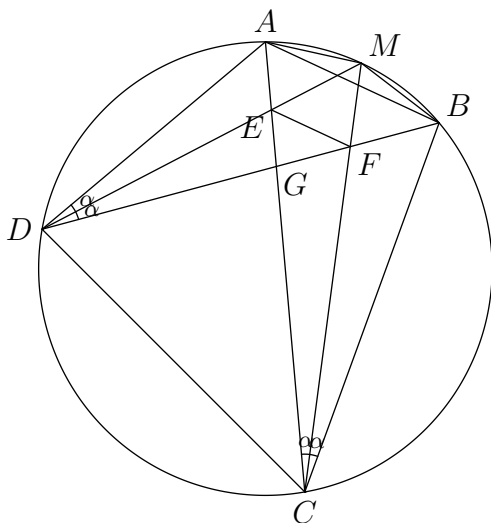
Soluzione Numeriamo i posti del tavolo da 1 a 60 e coloriamo di bianco i posti pari e di nero i posti dispari, accade che definendo la distanza tra marito e moglie come il minimo numero di sedie tra essi, la distanza tra due posti dello stesso colore è dispari e quella tra due colori diversi è pari. Ora supponiamo per assurdo che le 30 possibili distanze compaiano tutte, allora sono presenti un numero pari di posti bianchi o neri per le distanze dispari e un numero dispari per le distanze pari (poichè, essendo 15 le distanze pari, almeno un posto nero comparirà o in più o in meno rispetto ai bianchi). Ciò è assurdo perchè i posti neri e i posti bianchi sono 30.

3. Dimostrare che, dato un tetraedro $ABCD$, esiste, ed è unico, un punto P interno ad esso tale che i 4 tetraedri aventi come base rispettivamente le 4 facce del tetraedro e come vertice il punto P hanno lo stesso volume.

Soluzione Si indichi l'area di una faccia, per esempio di ABC , con A_{ABC} e il volume del tetraedro con V , allora si ha che $\frac{A_{ABC}h_d}{3} = V/4$ ha soluzione (rispetto ad h_d in \mathbb{R}^+). Tutti i punti di distanza h_d formano un piano δ parallelo ad ABC . Consideriamo il piano analogo rispetto ad ACD (β) e rispetto a BCD

(α), l'intersezione tra i piani α, β, δ è un punto P poichè essi non sono paralleli e si ha che P , se congiunto coi vertici delle tre facce considerate, forma tre solidi ciascuno di volume pari a $V/4$, ciò vuol dire che accadrà la stessa cosa con la faccia restante.

4. Su una circonferenza consideriamo cinque punti che chiamiamo, ordinatamente, A, M, B, C, D , e sia M equidistante da A e da B . Siano inoltre E ed F rispettivamente le intersezioni di MD con AC e di MC con BD . Si dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è inscrivibile in una circonferenza.



Soluzione Sia $\alpha = \widehat{BDM} = \widehat{MDA} = \widehat{MCA} = \widehat{BCM}$ perchè angoli che insistono su archi di circonferenza uguali. Allora, considerando la circonferenza Γ passante per E, F, D e chiamando C' il punto d'intersezione tra essa e il segmento AC si ha che $\widehat{AC'F} \leq \widehat{ACF}$ (poichè $\widehat{ACF} < 90^\circ$, ma C' è un punto su Γ che insiste sull'arco EF perciò è uguale a α , ma allora C' coincide con C).

5. Se esce “testa” ottengo un gettone, se esce “croce” ne ottengo due. Vincerò il gioco se arriverò (non importa dopo quanti lanci) a possedere esattamente 100 gettoni. Dire se la probabilità di vincere è maggiore, uguale o minore di $2/3$.

Soluzione La probabilità P_n di arrivare a possedere n gettoni con un certo numero di lanci è data dalla regola ricorsiva $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2}$ con $P_1 = \frac{1}{2}$, $P_2 = \frac{3}{4}$. Una formula chiusa per P_n è: $P_n = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. La si può dimostrare per induzione: supponiamo che sia vera per ogni numero intero positivo minore di n , allora $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Poichè la formula è vera per $n = 1$, risulta vera per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Per n pari la probabilità risulta chiaramente strettamente maggiore di $\frac{2}{3}$.

6. Sia α un numero reale ed f la funzione cosè definita:

$$f(n) = \begin{cases} f(m, n) = \alpha f(m, n-1) + (1-\alpha)f(m-1, n-1) & \text{se } m \text{ e } n \text{ sono interi positivi} \\ f(0, 0) = 1 \\ f(m, 0) = f(0, m) = 0 & \text{per ogni } m \text{ intero positivo} \end{cases}$$

Trovare i valori di α in corrispondenza dei quali si abbia $|f(m, n)| \leq 1989$ per ogni m ed n .

Soluzione

Lemma:

$$f(m, n) = \sum_{i=0}^l \alpha^{l-i} (1-\alpha)^i \binom{l}{i} f(m-i, n-l)$$

dove $l = \min\{m, n\}$

Dimostrazione: Se dalla prima definizione della funzione ci si riconduce a casi con numeri sempre più piccoli si può notare che il grado di $1-\alpha$ coincide con il numero sottratto a m . Ad ogni passaggio si toglie, in ogni caso un'unità dal secondo numero. Quindi, alla fine, dopo l "operazioni" si dovrà avere una somma di funzioni tutte con $n-l$ come seconda variabile. La somma degli esponenti di α e di $1-\alpha$ deve dare l , quindi α ha esponente $l-i$. Inoltre in uno stadio k -esimo del calcolo della funzione, un termine generico della somma $\alpha^{k-i} (1-\alpha)^i f(m-i, n-k)$ comparirà $\binom{k}{i}$ volte. Infatti se si prende come ipotesi induttiva che ciò sia vero per tutti gli interi positivi minori di k si ha che $\alpha^{k-i} (1-\alpha)^i f(m-i, n-k)$ può venire solo da $\alpha^{k-i} (1-\alpha)^{i-1} f(m-i+1, n-k+1)$ o da $\alpha^{k-i-1} (1-\alpha)^i f(m-i, n-k+1)$ che insieme compariranno $\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i}$. Poichè ciò è vero per $k = 1$, è vero per tutti i $k \in \mathbb{Z}^+$ Ora si presentano tre casi:

- $l = n < m$. $f(m, n) = 0$ infatti ogni termine della somma ha 0 come seconda variabile. In questo caso vanno ovviamente bene tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $l = n = m$. $f(m, n) = (1-\alpha)^n$ infatti ogni termine della somma ha 0 come seconda variabile tranne l'ultimo che è $f(0, 0) = 1$. In questo caso vanno bene tutti e solo i valori di $0 \leq \alpha \leq 2$ (perchè altrimenti $(1-\alpha)^n > 1$ e col crescere di n cresce in modo illimitato).
- $l = m < n$. Allora $f(m, n)$ può essere riscritta come

$$f(n-k, n) = \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \binom{n-1}{k-1}$$

con $k > 0$.

Dimostrazione: il fatto segue per induzione notando che è innanzitutto vera per $n = 2$ e che $f(n - k, n) = \alpha f(n - k, n - 1) + (1 - \alpha)f(n - k - 1, n - 1)$, la quantità nel RHS è uguale (per ipotesi induttiva) a $\alpha^k(1 - \alpha)^{n-k} \binom{n-2}{k-2} + \alpha^k(1 - \alpha)^{n-k} \binom{n-2}{k-1} = \alpha^k(1 - \alpha)^{n-k} \binom{n-1}{k-1}$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(n - k, n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k(1 - \alpha)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{k-1}(1 - \alpha)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^k(1 - \alpha)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} = \alpha [(\alpha + 1 - \alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = \alpha - \alpha^n \end{aligned}$$

- Se $0 \leq \alpha \leq 1$ tutte le funzioni che compaiono nella somma sono non negative e la loro somma è inferiore a 1.
- Se $1 < \alpha \leq 2$ tutte le funzioni che compaiono nella somma sono negative e la loro somma in valore assoluto è $|\alpha - \alpha^n|$ che è una quantità illimitata (per le ipotesi fatte su α), ciò non è accettabile perchè quando la somma supererà $1989(n-1)$ almeno un termine (tra le funzioni) lo dovrà superare.

In conclusione i valori di α accettabili sono $0 \leq \alpha \leq 1$.