

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $e = 2,7183$ $\pi = 3,1416$

“Not to worry,” she said. “All you have to do is walk straight at the barrier between platforms nine and ten. Don’t stop and don’t be scared you’ll crash into it, that’s very important. Best do it at a bit of a run if you’re nervous.”
(J.K. Rowling, “Harry Potter and the Philosopher’s Stone”)

Testi di Giovanni Paolini

15 aprile 2010

Gara a Squadre - Disfida Nove e Tre Quarti - Testi

1. La Disfida Matematica [20 punti]

Il primo problema della *Disfida Matematica*, la più importante gara di matematica del mondo dei maghi, è il seguente: “Qual è la somma di tutti i numeri primi minori di 100 esprimibili come differenza di due cubi perfetti (positivi)?”

2. La Mappa del Malandrino [20 punti]

Harry, guardando la Mappa del Malandrino, nota che c'è un gruppo di 15 persone che stanno confabulando in un punto del castello. Improvvisamente queste si mettono a camminare in modo che, in ogni istante, 6 di loro vadano verso nord, 5 verso est, 3 verso sud e 1 verso ovest. Indipendentemente dalla direzione, ognuno di loro si muove sempre alla velocità di $1 \frac{m}{s}$. Dopo dieci minuti esatti si incontrano tutti nuovamente da qualche altra parte. A che distanza (in metri) si trovano dal luogo da cui sono partiti?

3. La scorta di Burrobirra [20 punti]

Nella cantina dei “Tre Manici di Scopa” ci sono 2010 bottiglie di Burrobirra (numerate da 1 a 2010), ognuna prodotta in una determinata annata. Chiamando $f(n)$ l'annata della bottiglia numero n , per ogni k si ha che:

$$f(2k) = f(2k + 1); \quad f(3k) = f(3k + 1); \quad f(5k) = f(5k + 1).$$

In quante annate diverse possono essere state prodotte, al massimo, queste bottiglie?

4. La base domestica [30 punti]

Gli elfi domestici contano utilizzando la più grande base numerica per cui il numero 1111 è pari al prodotto di due numeri primi minori di 900. Qual è questa base?

5. L'errore nel resto [30 punti]

Com'è noto, nel mondo dei maghi si utilizzano delle strane monete: gli zellini, le falci (una falce vale 29 zellini) e i galeoni (un galeone vale 17 falci). Ron, entrato in un negozio di dolciumi, ne compra un po' pagando un galeone e calcolando di dover ricevere come resto x falci e y zellini; il negoziante sbadato però gli dà y falci e x zellini e Ron si accorge di aver ricevuto 2 zellini in più rispetto al triplo di quanto doveva ricevere! Qual era il resto giusto?

Indicare nelle prime due cifre il numero di falci e nelle altre due il numero di zellini.

6. Lezione di Storia della Magia [30 punti]

Durante una noiosissima lezione di Storia della Magia, Ron disegna sulla sua pergamena un pentagono regolare, e nota che tracciando tutte le sue diagonali ottiene un pentagono più piccolo in mezzo. Se l'area del pentagono di partenza è 1000, quanto vale l'area del pentagono più piccolo?

7. L'allenamento di Quidditch [30 punti]

Fred, George e Ginny si trovano per allenarsi a Quidditch. Per primo va in porta uno dei tre, e gli altri due cercano di fare gol; quando qualcuno segna, sostituisce il portiere e si continua allo stesso modo. Fred gioca fuori dalla porta 12 volte, mentre George 21; Ginny invece gioca in porta 8 volte. Quante possibili sequenze diverse di portieri ci possono essere?

8. Il baule di Malocchio [40 punti]

Il baule dell'auror Alastor "Malocchio" Moody, oltre che 7 serrature, possiede anche un codice di sicurezza a 7 cifre. Ogni cifra può essere 0, 1, 2 o 3; inoltre, dato che Malocchio è superstizioso, sicuramente ha scelto un codice in cui compaia un numero dispari di zeri. Quanti sono i possibili codici?

9. I piani di Malfoy [40 punti]

Hermione è intenzionata a scoprire cosa combinano di notte Malfoy e 6 suoi complici. La ragazza sa che Malfoy è il più basso e che i 7 hanno altezze tutte diverse; inoltre scopre che questi passeranno vicino al dormitorio di Grifondoro in un ordine casuale durante l'arco dell'intera nottata. Vorrebbe seguire Malfoy ma l'oscurità non le consente di vedere i visi di quelli che passano, quindi decide di lasciar passare i primi 2 e poi seguire il primo che sia più basso di quei due. Qual è la probabilità che Hermione segua proprio Malfoy?

Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

10. Il lago di Hogwarts [40 punti]

Il lago di Hogwarts è delimitato da una circonferenza che passa per i tre punti di tangenza di altre tre grandi circonferenze, tangenti esternamente a due a due, di raggi 1183, 1325, 1944 metri. Quanto misura il raggio del lago?

11. L'altro Marchio [40 punti]

Oltre al Marchio Nero i Mangiamorte utilizzano un altro simbolo, ancora più spaventoso, per identificarsi. Questo simbolo è costituito da 5 triangoli così costruiti: il primo ha gli angoli interni di 89° , 82° , 9° ; ognuno degli altri ha come vertici i tre punti di tangenza della circonferenza inscritta all'ultimo triangolo costruito con i suoi lati. Qual è la differenza tra l'ampiezza dell'angolo maggiore e quella dell'angolo minore del triangolo più piccolo?

12. Il maestro delle pozioni 1**[40 punti]**

Piton possiede una sterminata collezione di pozioni (Cantor, un potente mago di circa un secolo fa, direbbe che sono così tante da non riuscire nemmeno a contarle); per facilitarne l'utilizzo, ogni pozione è stata etichettata con un numero reale diverso e alla fine si è scoperto che ogni numero reale (anche negativo) corrisponde ad esattamente una pozione. Due armadi contengono ciascuno un certo numero (finito) di pozioni e il numero totale di pozioni dei due armadi è primo. Trasferendo la pozione numero 20 da un armadio all'altro, Piton nota che in ciascuno dei due armadi la media dei valori delle etichette aumenta di 1. Sapendo che la somma dei valori delle etichette di tutte le pozioni contenute in entrambi gli armadi è 2010, quanto vale la somma dei valori delle etichette delle pozioni contenute nel primo armadio (prima di togliere la pozione numero 20)?

13. Punizione con Dolores**[40 punti]**

Il maldestro Neville ha rovesciato una bottiglia di Burrobirra sulla scrivania della professoressa Umbridge. Per punizione dovrà scrivere su un rotolo di pergamena (utilizzando rigorosamente la penna magica della cara Dolores) tutte le terne ordinate (a, b, c) di numeri interi con $1 \leq a, b, c \leq 2010$ tali che

$$\text{mcm}(a, b, c) = a + b + c.$$

Quante sono queste terne?

14. Giocando a Gobbiglie**[50 punti]**

Harry e Ron fanno varie partite a Gobbiglie; con determinate probabilità può vincere uno, vincere l'altro, oppure può esserci un pareggio. La probabilità che in tre partite si ottengano tutti e tre i risultati possibili (in qualche ordine) è $\frac{1}{8}$. La probabilità che invece in due partite si ottenga uno stesso risultato (due pareggi oppure due vittorie della stessa persona) è $\frac{3}{7}$. Qual è la probabilità che in quattro partite si verifichino due risultati di un tipo e due di un altro (per esempio due vittorie di Ron e due pareggi) in qualsiasi ordine? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

15. La riunione del Ministero**[50 punti]**

Ad una riunione partecipano 2010 impiegati del Ministero della Magia, seduti attorno ad un tavolo rotondo; alcuni di essi sono cavalieri, e dicono sempre la verità, mentre gli altri sono furfanti, e mentono sempre. Ognuno afferma: "Almeno uno dei miei vicini direbbe che sono un cavaliere". Dopo un po' di tempo tutti si alzano e metà di loro lascia la sala. I rimanenti si siedono senza nessun ordine preciso attorno ad un tavolo più piccolo (sempre rotondo) e ognuno di essi afferma "Entrambi i miei vicini direbbero che sono un furfante". Quanti tra quelli che hanno lasciato la sala, come minimo, sono cavalieri?

16. La profezia**[50 punti]**

La professoressa Cooman ha predetto il ritorno dell'Oscuro Signore.

Detto $p(x, y) = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \cdots (x^{1024} + y^{1024})$, Colui-che-non-deve-essere-nominato ritornerà tra un numero di anni pari a

$$\frac{p(1, 2) + p(2, 3) + p(3, 4) + \dots + p(2009, 2010)}{p(1, 2010)}.$$

Tra quanto avverrà questo terribile evento?

17. L'ufficio del Preside**[50 punti]**

Un giorno, per entrare nell'ufficio del Preside (davanti al quale è scritto "Non entri chi non sa di geometria"), il gargoyle di guardia pone il seguente quesito: "I punti A, B, C, D si trovano, in quest'ordine, su una circonferenza di raggio R . $AB = AC = 1000$ e i segmenti DC, DA, DB stanno tra loro come i numeri 1, 5, 7. Quanto vale R ?"

18. La Pietra Filosofale 1**[60 punti]**

La Pietra Filosofale ha la forma di un ottaedro regolare di lato 6000 (calcolato nel Sistema Internazionale degli Elfi Domestici). Al suo interno c'è una cavità sferica; qual è al massimo la misura del raggio di questa cavità?

19. La Pietra Filosofale 2**[60 punti]**

Per custodire meglio la Pietra Filosofale, che ha la forma di un ottaedro regolare con le facce di colore rosso, Albus Silente decide di crearne delle copie. Ogni nuova Pietra è identica all'originale ma ha una o più facce colorate di blu; inoltre Silente vuole che tutte le copie siano diverse tra loro, anche dopo una qualsiasi rotazione. Quante copie può creare al massimo Silente?

20. Regali al castello**[60 punti]**

I 2010 studenti di Hogwarts decidono di farsi dei regali, in modo che ognuno dia un regalo ad esattamente un altro, e che ogni studente riceva esattamente un regalo. Sia n il numero di modi in cui questo può essere fatto. Determinare quali sono le prime quattro cifre significative del numero

$$\frac{2010!}{n}.$$

Per esempio, se il numero cominciasse con le cifre 49, 328... dare come risultato 4932.

21. La strana Passaporta**[70 punti]**

Per andare alla finale della Coppa del Mondo di Quidditch, Harry e gli altri utilizzano una Passaporta dalla forma alquanto bizzarra. Partendo da un cubo di lato 18 centimetri, si considerino i due diversi tetraedri regolari che hanno come vertici alcuni dei vertici del cubo. La Passaporta ha la forma dell'unione di questi due tetraedri! Qual è il suo volume?

22. Lo Smistamento**[70 punti]**

Sta per iniziare un nuovo anno a Hogwarts ed è tempo di Smistamento: 20 nuovi maghi devono essere divisi tra le quattro Case (Grifondoro, Tassorosso, Corvonero e Serpeverde). Inizialmente 5 di loro desiderano andare a Grifondoro, 5 a Tassorosso, 5 a Corvonero e 5 a Serpeverde; tuttavia, quando 3 ragazzi che vogliono andare in 3 Case diverse si incontrano, si mettono a discutere e alla fine decidono che vogliono andare tutti e tre nella quarta Casa! Ogni giovane mago può prendere parte a più discussioni, e quindi anche cambiare idea più volte. In quanti modi possono essere distribuite le preferenze alla fine?

23. Il maestro delle pozioni 2**[80 punti]**

Piton sta cercando di preparare la pozione della fortuna, la “Felix Felicis”, utilizzando un numero finito di pozioni tra quelle (descritte in un problema precedente) che già possiede. Il professore riesce a comprendere che:

- nel calderone deve essere messa almeno una pozione che abbia un'etichetta con valore strettamente compreso tra 0 e $\frac{1}{2010}$;
- Se x e y sono i valori delle etichette di due pozioni (non necessariamente distinte) che si trovano nel calderone, per evitare una sonora esplosione si deve avere che $xy \neq 1$;
- Se x e y sono i valori delle etichette di due pozioni (anche uguali) che si trovano nel calderone, anche quella di etichetta $\frac{x+y}{1-xy}$ deve essere messa nel calderone.

Quante sono, come minimo, le pozioni che serviranno?

24. L'indovinello della sfinge**[80 punti]**

Mentre si trova nel labirinto durante la terza prova del Torneo Tremaghi, Harry incontra una sfinge che gli pone il seguente indovinello: “Siano A, B, C tre punti allineati (in quest'ordine) su una retta r . Siano inoltre $\omega_1, \omega_2, \Gamma_0$ le circonferenze di diametri rispettivamente AC, AB, BC . Definiamo Γ_1 come una delle due circonferenze tangenti a ω_1, ω_2 e Γ_0 ; inoltre per ogni n sia Γ_{n+1} la circonferenza (diversa da Γ_{n-1}) tangente a ω_1, ω_2 e Γ_n . Se il raggio di Γ_{29} vale 71, qual è la distanza del suo centro dalla retta r ?”

Soluzioni

Num	Titolo	Punti	Risposta
1	La Disfida Matematica	20	0124
2	La Mappa del Malandrino	20	0200
3	La scorta di Burrobirra	20	0537
4	La base domestica	30	0016
5	L'errore nel resto	30	0310
6	Lezione di Storia della Magia	30	0145
7	L'allenamento di Quidditch	30	0495
8	Il baule di Malocchio	40	8128
9	I piani di Malfoy	40	0099
10	Il lago di Hogwarts	40	0827
11	L'altro Marchio	40	0005
12	Il maestro delle pozioni 1	40	2262
13	Punizione con Dolores	40	4020
14	Giocando a Gobbligie	50	0243
15	La riunione del Ministero	50	1005
16	La profezia	50	2009
17	L'ufficio del Preside	50	0625
18	La Pietra Filosofale 1	60	2449
19	La Pietra Filosofale 2	60	0022
20	Regali al castello	60	2718
21	La strana Passaporta	70	2916
22	Lo Smistamento	70	0121
23	Il maestro delle pozioni 2	80	6315
24	L'indovinello della sfinge	80	4118