

Algebra – Problemi di ammissione

1. Per ogni polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a coefficienti interi definiamo

$$\|p(x)\| = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

- (a) Determinare se esistono due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ a coefficienti interi tali che

$$\|p(x)\| \geq 2011, \quad \|q(x)\| \geq 2011, \quad \|p(x)q(x)\| = 1.$$

- (b) Determinare se esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che

$$\|(x^2 - 3x + 1)p(x)\| = 1.$$

2. Sia a_n la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \quad a_1 = 2.$$

Determinare il più piccolo numero reale L tale che

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < L$$

per ogni intero positivo k .

3. Determinare, per ogni intero $n \geq 2$, la più grande costante C_n tale che

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + C_n (a_1 - a_n)^2$$

per ogni n -upla di numeri reali positivi a_1, \dots, a_n .

Combinatoria – Problemi di ammissione

1. Ad una festa partecipano n persone. Alcune di queste persone si conoscono, altre no (la conoscenza è simmetrica). Si dice che 2 persone sono *sconosciuti di primo grado* se non si conoscono, ma esiste un altro partecipante alla festa che le conosce entrambe.

Determinare, in funzione di n , il massimo numero di coppie di sconosciuti di primo grado che può esserci alla festa.

2. Un grafo ha n vertici ed m lati. Indichiamo i vertici con v_1, \dots, v_n , ed indichiamo con d_i il grado del vertice v_i (cioè il numero di lati uscenti dal vertice stesso).

Supponiamo per ipotesi che $1 \leq d_i \leq 2010$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

- (a) Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \leq 4022m - 2010n.$$

- (b) Determinare tutti i valori di n per cui esiste un grafo con n vertici che realizza l'uguaglianza.

3. Alberto ha pensato un numero intero tra 1 e 200 (estremi inclusi). Ad ogni turno Barbara può scegliere un sottoinsieme di $\{1, \dots, 200\}$ e chiedere ad Alberto se il numero che ha scelto appartiene al sottoinsieme. Se la risposta è affermativa, Barbara paga 2 euro. Se la risposta è negativa, Barbara paga 1 euro.

Determinare di quanti euro deve disporre Barbara per essere sicura di indovinare il numero pensato da Alberto.

Geometria – Problemi di ammissione

1. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze congruenti con centri O_1 e O_2 , rispettivamente, che si intersecano in due punti distinti A e B . Sia P un punto sull'arco AB di Γ_2 contenuto in Γ_1 . La retta AP interseca nuovamente Γ_1 in C , la retta CB interseca nuovamente Γ_2 in D , e la bisettrice dell'angolo $\angle CAD$ interseca Γ_1 e Γ_2 in E ed L , rispettivamente. Sia F il simmetrico di D rispetto al punto medio di PE .

Dimostrare che esiste un punto X che verifica

$$\angle XFL = \angle XDC = 30^\circ \quad \text{e} \quad CX = O_1O_2.$$

2. Sia ABC un triangolo con $\angle BAC \neq 90^\circ$. Sia O il circocentro del triangolo ABC , e sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo BOC . Supponiamo che Γ intersechi la retta AB in un punto P diverso da B , e la retta AC in un punto Q diverso da C . Sia ON diametro del cerchio Γ .

Dimostrare che il quadrilatero $APNQ$ è un parallelogramma.

3. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze con raggi diversi che si intersecano in due punti distinti A e B . Siano MN ed ST le tangenti comuni alle due circonferenze (con M ed S appartenenti a Γ_1 , e N e T appartenenti a Γ_2). Siano H_1, H_2, H_3, H_4 gli ortocentri dei triangoli AMN, AST, BMN e BST , rispettivamente.

(a) Dimostrare che $AH_2 = BH_4$.

(b) Dimostrare che H_1, H_2, H_3, H_4 sono i vertici di un rettangolo.

Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Sia a_n la successione degli interi positivi la cui rappresentazione decimale è della forma

$$a_n = 2 \underbrace{010\,010 \dots 010}_{n \text{ volte}}$$

(si intende che il blocco 010 è ripetuto n volte).

Dimostrare che esistono infiniti elementi della successione che sono multipli di a_{2011} .

2. Siano a ed n due interi positivi con la proprietà che tutti i fattori primi di a sono maggiori di n .

Dimostrare che $n!$ divide $(a-1)(a^2-1) \cdot \dots \cdot (a^{n-1}-1)$.

3. Sia $p > 5$ un numero primo. Determinare tutti gli interi positivi x tali che

$$\frac{5p^n + x^n}{5p + x}$$

è intero per ogni intero positivo n .