Soluzioni problemi di allenamento 15 febbraio 2011

1. **Len-to Violen-to!** Il centro di un quadrato di lato 10 m è distante $5\sqrt{2}$ m dai suoi quattro vertici. Essendo la potenza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, in tale punto il suono generato dalla singola cassa è $(5\sqrt{2})^2 = 50$ volte meno forte che a 1 m di distanza. Calcoliamo la potenza in decibel, sfruttando l'informazione su $log_{10}2$, nel seguente modo: prima dividiamo per 100 e poi moltiplichiamo per 2. Dividendo per $100 = 10^2$ l'intensità, la quantità in decibel diminuisce di $10 \cdot 2 = 20$, scendendo a $140 - 20 = 120$; moltiplicando per $2 = 10^{log_{10}2}$, la quantità in decibel aumenta di $10 \cdot log_{10}2$, che in base alle limitazioni date dal testo è compresa tra 3.00 e 3.02. Poiché le casse sono in numero di quattro, l'intensità va ulteriormente moltiplicata per 4, e il numero di decibel aumenta ancora di $10 \cdot log_{10}4 = 10 \cdot 2 \cdot log_{10}2$, quantità compresa tra $2 \cdot 3.00 = 6.00$ e $2 \cdot 3.02 = 6.04$. In tutto bisogna dunque aumentare il numero di 120 di un valore compreso tra 9.00 e 9.06, e la risposta esatta è dunque **129**.

2. **Coincidenze di compleanni** Sia x l'età di Elisa e $x + 17$ l'età di Oreste. Possiamo tradurre rispettivamente le due affermazioni come:

$$\begin{cases} 100x + (x + 17) = & m^2 \\ 100(x + 13) + (x + 17 + 13) = & n^2 \end{cases}$$

Dovrà naturalmente essere $n^2 - m^2 = 1313$, da cui fattorizzando $(n - m)(n + m) = 13 \cdot 101$, ed essendo m, n positivi:

$$\begin{cases} n - m = & 13 \\ n + m = & 101 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $(m, n) = (44, 57)$, da cui $m^2 = 1936$, le due età sono rispettivamente 19 e 36, e la risposta esatta è $36 \cdot 19 =$ **684**.

3. **Voto di fiducia** La situazione si presenta con: 200 voti sicuramente a favore, 200 voti sicuramente contro, 31 astensioni. A decidere sono dunque i 69 voti rimanenti; in particolare, il governo resiste se e soltanto se almeno 35 di questi voti sono per la fiducia. Possiamo scrivere dunque la probabilità come:

$$\frac{\binom{69}{35} + \binom{69}{36} + \cdots + \binom{69}{69}}{2^{69}} = \frac{\binom{69}{35} + \binom{69}{36} + \cdots + \binom{69}{69}}{\binom{69}{0} + \binom{69}{1} + \cdots + \binom{69}{69}} = \frac{\sum_{i=35}^{69} \binom{69}{i}}{\sum_{i=0}^{69} \binom{69}{i}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=35}^{69} \binom{69}{i}}{\sum_{i=0}^{34} \binom{69}{i} + \sum_{i=35}^{69} \binom{69}{i}} = \frac{\sum_{i=35}^{69} \binom{69}{i}}{\sum_{i=35}^{69} \binom{69}{i} + \sum_{i=35}^{69} \binom{69}{i}} = \frac{1}{2}$$

dove la penultima uguaglianza segue dalla legge delle classi complementari, per cui $\binom{69}{34} = \binom{69}{35}$, $\binom{69}{33} = \binom{69}{36}$, e così via, essendo in generale $\binom{69}{k} = \binom{69}{69-k}$. La risposta è dunque **50**.

4. **Lettera di San Valentino** Dovendo essere, con il leggermente arcaico ma sempre utile linguaggio delle proporzioni, $x : y = y : \frac{x}{2}$, sarà $\frac{x^2}{2} = y^2$, ovvero $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$. La risposta sarà dunque $1000\sqrt{2}$, la cui parte intera è **1414**.

   Si noti che non si tratta di niente altro che la proprietà degli standard A dei fogli di carta, come A3, A4, A5, ...

5. **Fell running** Analizziamo i vari casi dipendenti dal piazzamento di Cantanna nell'ultima gara e contiamo in quanti casi si classificherebbe primo in campionato:

   - se Cantanna arriva tra i primi quattro, va bene qualunque piazzamento degli altri, dunque i casi sono $4 \cdot 99 \cdot 98$;
   - se Cantanna arriva quinto, Bracco non deve vincere, mentre Attardi non può diventare campione e il suo piazzamento è dunque non rilevante; ci sono pertanto $98 \cdot 98$ set di piazzamenti;
   - se Cantanna arriva sesto, Bracco non deve arrivare tra i primi 2, mentre Attardi ancora non può diventare campione (e così accadrà fino al caso dell'ottavo posto compreso): $97 \cdot 98$;
   - se Cantanna arriva settimo, Bracco non deve arrivare tra i primi 3: $96 \cdot 98$;
   - se Cantanna arriva ottavo, Bracco non deve arrivare tra i primi 4: $95 \cdot 98$;
   - sia ora $9 \leq i \leq 80$; se Cantanna arriva nella posizione i, Bracco non deve arrivare tra i primi $i-4$ e Attardi non deve arrivare tra i primi $i-8$: i piazzamenti sono, per i fissato, $(103-i) \cdot (106-i)$.
   - sia infine $81 \leq i \leq 100$; in tal caso, poiché dall'ottantesimo posto in poi tutti prendono lo stesso numero di punti, valgono su Bracco e Attardi le stesse condizioni del caso $i = 80$ del punto precedente; ci sono pertanto in tutto $20 \cdot 23 \cdot 26$ piazzamenti.

   Il numero totale si può scrivere pertanto come:

$$4 \cdot 99 \cdot 98 + 98 \cdot 98 + 97 \cdot 98 + 96 \cdot 98 + 95 \cdot 98 + \sum_{i=9}^{80} [(103-i) \cdot (106-i)] + 20 \cdot 23 \cdot 26$$

Iniziando a svolgere i calcoli inerenti i prodotti e sviluppando la sommatoria possiamo scrivere:

$$38808 + 9604 + 9506 + 9408 + 9310 + \sum_{i=9}^{80} [i^2 - 209i + 10918] + 11960$$

Sommiamo ora tutte le quantità note e operiamo ancora sulla sommatoria:

$$88596 + \sum_{i=9}^{80} i^2 - \sum_{i=9}^{80} 209i + \sum_{i=9}^{80} 10918$$

Svolgendo un'ulteriore successione di passaggi algebrici:

$$88596 + \sum_{i=9}^{80} i^2 - 209 \sum_{i=9}^{80} i + 10918 \sum_{i=9}^{80} 1$$

$$88596 + \left(\sum_{i=1}^{80} i^2 - \sum_{i=1}^{8} i^2 \right) - 209 \left(\sum_{i=1}^{80} i - \sum_{i=1}^{8} i \right) + 10918 \left(\sum_{i=1}^{80} 1 - \sum_{i=1}^{8} 1 \right)$$

Utilizzando le note formule $\frac{n(n+1)}{2}$ per la somma dei primi n interi e $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per la somma dei primi n quadrati, possiamo scrivere:

$$88596 + \left(\frac{80 \cdot 81 \cdot 161}{6} - \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} \right) - 209 \left(\frac{80 \cdot 81}{2} - \frac{8 \cdot 9}{2} \right) + 10918\,(80 - 8)$$

Svolgendo infine i calcoli:

$$88596 + 173880 - 204 - 209 \cdot 3240 + 209 \cdot 36 + 10918 \cdot 72$$

$$88596 + 173880 - 204 - 677160 + 7524 + 786096 = 378732$$

La risposta esatta è dunque **8732**.

6. **Sogni mondiali** Il problema si risolve applicando l'algoritmo di Euclide:

$21n + 4$	$14n + 3$	
$14n + 3$	$7n + 1$	$(21n + 4) = 1 \cdot (14n + 3) + (7n + 1)$
$7n + 1$	1	$(14n + 3) = 2 \cdot (7n + 1) + 1$
1	0	$(7n + 1) = (7n + 1) \cdot 1 + 0$

Il massimo comun divisore tra i due polinomi di primo grado è dunque 1, indipendentemente da n e pertanto per ogni suo valore. La risposta esatta è dunque **1**.

7. **Fell running II** Dal risultato del calcolo finale del problema *Fell running*, si evince immediatamente che la risposta esatta è **3787**.

8. **Di prima mattina** Innanzitutto, poiché il lato più lungo di un triangolo deve essere minore della somma degli altri due, segue che $4 < k < 26$. Ora, poiché il triangolo deve essere ottuso, il quadrato di un lato deve essere maggiore della somma dei quadrati degli altri due (si verifica per esempio con un'immediata applicazione del teorema del coseno di Carnot), e dovrà essere pertanto $11^2+15^2 < k^2$, oppure $11^2+k^2 < 15^2$. Allora i valori possibili per k sono $5, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25$. Si verifica immediatamente che sono in numero di **13**, che è pertanto la risposta al quesito.

9. **War without end** I casi in cui si verifica la parità possono essere rappresentati dalla seguente tabella, dove B indica la sfida di ballo, E quella di elaborazione, M quella di matematica, L quella di latino; s indica una vittoria del Sommelier, g una vittoria del Galfer:

B	**E**	**M**	**L**	Probabilità
s	s	g	g	$0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.3136$
s	g	s	g	$0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.0336$
s	g	g	s	$0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.0576$
g	s	s	g	$0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.0196$
g	s	g	s	$0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.0336$
g	g	s	s	$0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.0036$

La probabilità totale è data dalla somma delle sei quantità ottenute, pari a $0.3136 + 0.0336 + 0.0576 + 0.0196 + 0.0336 + 0.0036 = 0.4616$; la risposta al quesito è dunque **4616**.

10. **Alla sfilata** Applicando i risultati di base sul principio di inclusione-esclusione possiamo scrivere:

$$|A \cup J \cup N| = |A| + |J| + |N| - |A \cap J| - |A \cap N| - |J \cap N| + |A \cap J \cap N|$$

Tutte le cardinalità a destra del segno di uguale sono note, e un immediato calcolo porta alla soluzione **17**.
D'altro canto la seguente enumerazione dei vestiti:

- Amelyne: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- Julie: 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15
- Naomi: 1, 2, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17

mostra un esempio in cui tale situazione può effettivamente verificarsi.

11. **Babbo Natale al cioccolato** Dividiamo il calcolo per casi:

- da 400 a 999: si hanno a disposizione le cifre (4,5,6,7,8,9), scelte 3 a caso, esiste un solo modo per ordinarle in maniera crescente. Vi sono dunque $\binom{6}{3} = 20$ numeri vincenti;

- da 1000 a 1999: si hanno a disposizione le cifre (2,3,4,5,6,7,8,9) per $\binom{8}{3} = 56$ numeri vincenti;
- da 2000 a 2999: si hanno a disposizione le cifre (3,4,5,6,7,8,9) per $\binom{7}{3} = 35$ numeri vincenti;
- da 3000 a 3999: si hanno a disposizione le cifre (4,5,6,7,8,9) per $\binom{6}{3} = 20$ numeri vincenti;
- da 4000 a 4999: si hanno a disposizione le cifre (5,6,7,8,9) per $\binom{5}{3} = 10$ numeri vincenti;
- 5000 non è una combinazione vincente.

In totale vi sono $20 + 56 + 35 + 20 + 10 = \mathbf{141}$ combinazioni vincenti.

12. **Combinazione segreta** Benché la presenza di due operatori di fattoriale possa trarre in inganno, si constata che si tratta di una forma del tipo $\frac{n!}{n}$, con $n = 7!$. Poiché il risultato di tale operazione è semplicemente $(n-1)!$, si giunge a $x! = (7! - 1)!$. Poiché la funzione fattoriale è iniettiva per valori del dominio diversi da 0 e 1 e valori del codominio diversi da 1, possiamo semplificare tale operatore giungendo a $x = 7! - 1 = \mathbf{5039}$.

13. **Il tamango** L'ipotesi di linearità può essere tradotta affermando che, una soluzione composta di una parte di acqua pari a λ, e di una parte di alcol pari a μ, con il vincolo $\lambda + \mu = 1$, che fa sì anche che le due quantità siano i rispettivi valori percentuali divisi per 100, avrà una densità pari a $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0.789$. Innanzitutto possiamo eliminare uno dei due quantitativi che indicano una parte, in base al vincolo, ovvero possiamo scrivere, scegliendo di fare a meno di λ, e ricavando che $\lambda = 1 - \mu$, una relazione che lega la densità in funzione della sola gradazione alcolica: $(1 - \mu) \cdot 1 + \mu \cdot 0.789$, da cui svolgendo un paio di passaggi algebrici: $1 - \mu \cdot 0.211$. Per quanto asserito nel testo del quesito, questa quantità dovrà essere minore di 0.918, pertanto $\mu \cdot 0.211 > 1 - 0.918 = 0.082$. Segue infine che $\mu > \frac{0.082}{0.211}$, dove la quantità a secondo membro si verifica essere strettamente compresa tra 0.38 e 0.39, e dunque la rispettiva gradazione tra il 38% e il 39%. La risposta esatta è dunque **38**.

14. **La famiglia Fibonacci** Per un noto risultato teorico (dimostrabile in diversi modi) il rapporto tra due termini successivi della serie di Fibonacci classica tende alla quantità $\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 1.61803$. Poiché, posta F_n tale serie, possiamo scrivere questa serie come $G_n = F_n \cdot 10^{-n}$, la quantità a cui tenderà il rapporto sarà la precedente divisa per 10, ovvero circa 0.161803. La risposta esatta è dunque **1618**.

15. **La piazza** Sia ABC il triangolo, M, N e O i punti medi dei lati, e sia G il baricentro. Il triangolo BGC è retto, quindi il lato BC è il diametro

della circonferenza che lo inscrive. Inoltre OB = OC = OG = MN per le proprietà delle mediane. Quindi:

$$AO = 3 \cdot OG = 3 \cdot \sqrt{MG^2 + GN^2} = 3 \cdot \sqrt{\left(\frac{240}{3}\right)^2 + \left(\frac{450}{3}\right)^2} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt{6400 + 22500} = 3 \cdot \sqrt{28900} = 3 \cdot 170 = \mathbf{510}$$

16. **La famiglia Fibonacci II** Riferendoci alla notazione utilizzata nella soluzione del problema *La famiglia Fibonacci*, dobbiamo calcolare $S = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$. Si osserva, a partire dalla relazione fondamentale della serie di Fibonacci classica $F_i = F_{i+2} - F_{i+1}$, che vale in questo caso la relazione $G_i = 100 \cdot G_{i+2} - 10 \cdot G_{i+1}$. Da ciò si può passare ad una relazione tra sommatorie, in virtù del fatto che la successione G_n tende a zero:
$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i = 100 \cdot \sum_{i=3}^{\infty} G_i - 10 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} G_i$$
Mettendo in evidenza i termini in più nella prima e nell'ultima somma si può scrivere:
$$G_1 + G_2 + \sum_{i=3}^{\infty} G_i = 100 \cdot \sum_{i=3}^{\infty} G_i - 10 \cdot G_2 - 10 \cdot \sum_{i=3}^{\infty} G_i$$
da cui segue che $G_1 + 11 \cdot G_2 = 89 \cdot \sum_{i=3}^{\infty} G_i$, cioè:
$$\sum_{i=3}^{\infty} G_i = \frac{G_1 + 11 \cdot G_2}{89} = \frac{1}{89}\left(\frac{1}{10} + \frac{11}{100}\right) = \frac{21}{8900}$$
Si calcola infine:
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} G_i = G_1 + G_2 + \sum_{i=3}^{\infty} G_i = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{21}{8900} =$$
$$= \frac{890 + 89 + 21}{8900} = \frac{1000}{8900} = \frac{10}{89}$$
La risposta è dunque **1089**.