

Lemma 1: in un quadrilatero qualsiasi i punti medi delle diagonali (M e M') e il punto medio del segmento, che congiunge i punti d'incontro dei lati opposti del quadrilatero (M''), sono allineati (vedi figura).

Dimostrazione lemma 1:

Uso i vettori per calcolare l'area compresa tra i tre punti medi che dovrebbe risultare zero e quindi i punti devono essere allineati.

Prendo in considerazione un origine qualsiasi e chiamo  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  i vettori che vanno dall'origine ai vertici del quadrilatero.

Analogamente definisco  $\vec{E}, \vec{F}$  che sono le intersezioni dei lati opposti del quadrilatero.

Il prodotto vettoriale tra due vettori  $\vec{V}, \vec{W}$  é definito come  $\vec{V} \times \vec{W} \sin \angle VOW$ .

L'area di un triangolo ABC é  $\frac{\vec{A}''\vec{B} + \vec{B}''\vec{C} + \vec{C}''\vec{A}}{2}$  perché l'area di un triangolo ABO é  $\frac{\vec{A}''\vec{B}}{2}$  quindi sommando l'area dei tre triangoli ABO, BCO e CAO ottengo l'area del triangolo ABC (vedi figura lemma 1b per tutte le configurazioni).

I punti medi si calcolano come media aritmetica dei due estremi del segmento:  $\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2}$ .

Calcolo l'area di MM'M'':

$$A_{MM'M''} = \frac{(\vec{A} + \vec{C})''(\vec{B} + \vec{D}) + (\vec{B} + \vec{D})''(\vec{E} + \vec{F}) + (\vec{E} + \vec{F})''(\vec{A} + \vec{C})}{8}$$

$$A_{MM'M''} = \frac{\vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{D} + \vec{C}\vec{B} + \vec{C}\vec{D} + \vec{B}\vec{E} + \vec{B}\vec{F} + \vec{D}\vec{E} + \vec{D}\vec{F} + \vec{E}\vec{A} + \vec{E}\vec{C} + \vec{F}\vec{A} + \vec{F}\vec{C}}{8}$$

$$A_{MM'M''} = \frac{(\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{E} + \vec{E}\vec{A})}{8} + \frac{(\vec{A}\vec{D} + \vec{D}\vec{F} + \vec{F}\vec{A})}{8} + \frac{(\vec{C}\vec{B} + \vec{B}\vec{F} + \vec{F}\vec{C})}{8} + \frac{(\vec{C}\vec{D} + \vec{D}\vec{E} + \vec{E}\vec{C})}{8} = 0$$

Ogni termine messo in evidenza é l'area di un triangolo degenere (tre punti allineati) quindi é uguale a zero.

Anche la loro somma é zero quindi i tre punti MM'M'' sono allineati.