MATHESIS
SEZIONE BETTAZZI

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

I Simulazione Gara a Squadre Nazionale

Fabio Roman
Marco Protto

18 Aprile 2011

Indice

1 Testi

1. Quante soluzioni reali, comprese tra 1 e 100, possiede l'equazione:
$$[x^2] + [x]^2 = 2x[x]$$

2. Sia $P(n)$ il prodotto delle cifre non nulle dell'intero positivo n. Per esempio, $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2011) = 2$. Si calcoli il valore della somma:
$$P(1) + P(2) + \ldots + P(2010) + P(2011)$$
riportando nella soluzione le ultime quattro cifre.

3. Un *ultraprimo* è un numero primo tale che, permutando le sue cifre, il numero ottenuto rimane primo. Qual è il più grande numero di 3 cifre ultraprimo?

4. Trovare il massimo intero positivo che non può essere espresso nella forma $66k + 61h$, con h e k non negativi.

5. Sia $f(n)$ il quadrato della somma delle cifre di n. Sia poi $f^{(2)}(n) = f(f(n))$, $f^{(3)}(n) = f(f(f(n)))$, e così via. Si calcoli $f^{(2011)}(1861)$.

6. Sia data un'espressione in cui compaiono soltanto cifre 2 e segni di moltiplicazione, tale per cui il risultato ha quattro cifre ed è il massimo possibile. A quanto corrisponde tale valore?

7. Determinare la costante del quadrato magico:

		2011
1861	1870	

8. Sia data una striscia di caselle illimitata in un verso, numerata progressivamente con i numeri naturali. Ognuna di queste caselle può contenere a sua volta un numero illimitato di gettoni. Le mosse ammissibili sono:
   - sostituire un gettone posto nella casella n con due gettoni, posto uno nella casella $n-1$ e uno nella casella $n+1$; questa mossa non può essere effettuata con un gettone posto nella casella 0;
   - l'inversa della precedente, ovvero sostituire una coppia di gettoni, uno posto nella casella $n-1$ e uno nella casella $n+1$, con un solo gettone, posto nella casella n.

Supponendo che la situazione iniziale sia data da un solo gettone presente nella casella 1, determinare il numero minimo di mosse necessario affinché si possa avere un solo gettone presente nella casella 2011. Si risponda 0000 se si ritiene l'operazione impossibile.

9. Quanti sono gli interi positivi strettamente maggiori di 9 le cui cifre in base 10 sono strettamente crescenti da sinistra verso destra?

10. Risolvere il seguente cruciverba, sapendo che lo schema contiene tutte e sole le cifre da 1 a 9. Dare come risposta il numero contenuto nella colonna centrale, letto dall'alto verso il basso.

1		2
3		

- Orizzontali
  - 1. Un quadrato.
  - 3. Un numero la cui somma delle cifre e 9.
- Verticali
  - 1. Un cubo.
  - 2. Un numero con cifre solo pari.

11. Sia ABC un triangolo, con $\widehat{ABC} = 75°$ e $\widehat{ACB} = 53°$. Disegnata la circonferenza circoscritta ad ABC, siano E il punto medio dell'arco BC non contenente A, e D il punto medio dell'arco BC contenente A. Quanto vale l'angolo $\widehat{AED}$?

12. Quattro persone si dispongono casualmente su 2 file da 5 posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti. Esprimere il risultato come somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

13. Siano $S_1, S_2, \ldots, S_{12}$ i vertici di un dodecagono regolare. Se si tracciano i segmenti S_1S_6, S_5S_{10} e S_9S_2, si formano quattro triangoli. Sia A l'area del triangolo centrale e B la somma delle aree degli altri tre. Si calcoli $1000A/B$.

14. Determinare la somma di tutti i razionali positivi che, ridotti ai minimi termini, hanno la forma $\frac{a}{30}$, e sono minori di 15.

15. Se si considera nello spazio l'insieme Q dei punti che hanno coordinate intere e comprese tra 0 e 12 (inclusi), quanti cubi esistono con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani e con i vertici appartenenti a Q?

16. Esplicitare il coefficiente del termine in x^{2011} del polinomio:
$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$, dove:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)^3(1+x^{16})(1+x^{32})^4 \\ P_2(x) &= (1+x^{64})(1+x^{128})(1+x^{256})(1+x^{512})(1+x^{1024}) \end{aligned}$$

(il polinomio è stato scritto spezzato in due fattori soltanto per motivi tipografici, la cosa non è rilevante ai fini della risoluzione del problema)

17. Qual è il più piccolo multiplo intero di 47 tale che il suo quadrato abbia almeno 63 divisori?

18. Disporre i numeri da 1 a 6 sulle facce di un dado in modo che la differenza tra la somma massima e la somma minima dei valori di tre facce concorrenti su di un vertice sia la più piccola possibile. Indicare come risposta, in ognuna delle 4 cifre, ordinatamente da sinistra a destra, il numero che si trova opposto a 1, quello opposto a 2, poi a 3 e infine a 4.

19. Siano A, B, C, D punti nell'ordine su di una circonferenza. Sappiamo che $\overline{AC} = \overline{CD} = 10\sqrt{5}$ e che $\overline{BC} = 5\sqrt{5}$. Detto E il piede della perpendicolare da C a BD, si ha $\overline{CE} = 10$. Determinare $\overline{AB}$.

20. La principessa Milunia vive in un castello la cui pianta è costituita dall'unione di 6 cerchi di raggio pari a 100, i cui centri sono disposti sui vertici di un esagono regolare di lato 100. Quanto misura il perimetro del castello? Si risponda con il risultato a meno del fattore π (in altre parole, se ad esempio il risultato è 10π, allora la risposta da dare è `0010`).

2 Soluzioni

Si riportano i risultati di tutti i problemi, illustrando il procedimento per alcuni di essi.

1. *(Cesenatico 2005 squadre, problema 13 finale)* **9901**
   Dimostriamo infatti che le soluzioni maggiori o uguali ad 1 sono date da tutti e soli i numeri razionali che si possono scrivere nella forma

   $$n + \frac{k}{2n}$$

   con n intero positivo e k intero compreso tra 0 e $2n-1$, estremi inclusi.
   Scriviamo x come $n + a$ dove n è la sua parte intera e a la mantissa:

   $$\begin{aligned} \mathrm{int}(x^2) + (\mathrm{int}(x))^2 &= 2 \cdot x \cdot \mathrm{int}(x) \\ \mathrm{int}((n+a)^2) + n^2 &= 2 \cdot (n+a) \cdot n \\ \mathrm{int}(n^2 + 2an + a^2) + n^2 &= 2n^2 + 2an \\ \mathrm{int}(n^2 + 2an + a^2) + n^2 &= 2n^2 + 2an \\ \mathrm{int}(n^2 + 2an + a^2) &= n^2 + 2an \end{aligned}$$

   Se ora $a = \frac{k}{2n}$, sostituendo a sinistra si ottiene:

   $$\mathrm{int}(n^2+2an+a^2) = \mathrm{int}\left(n^2 + 2 \cdot \frac{k}{2n} \cdot n + \frac{k^2}{4n^2}\right) = \mathrm{int}\left(n^2 + k + \frac{k^2}{4n^2}\right) = n^2+k$$

   dove nell'ultimo passaggio si tiene conto delle ipotesi fatte su k.
   Sostituendo a destra si ottiene:

   $$n^2 + 2an = n^2 + 2 \cdot \frac{k}{2n} \cdot n = n^2 + k$$

   e pertanto l'uguaglianza è verificata per tali valori di x.
   Proviamo ora che se a non può essere scritto in quella forma, non si può dare luogo ad una soluzione. Infatti, condizione necessaria (ma a priori non sufficiente) affinché ci sia l'uguaglianza tra i due membri, è che quello di destra sia un numero intero. Se a è un reale strettamente compreso tra 0 e 1, che non è possibile scrivere in tale forma, possiamo però scriverlo, fissato un n, come $\frac{b}{2n}$, dove b non è intero ed è strettamente compreso tra 0 e $2n$. Sia ora h la parte intera di b, r la sua mantissa, e scriviamo $a = \frac{b}{2n} = \frac{h}{2n} + \frac{r}{2n}$. Andando a sostituire nell'espressione a secondo membro:

   $$\begin{aligned} n^2 + 2an &= n^2 + 2 \cdot \frac{b}{2n} \cdot n \\ &= n^2 + 2 \cdot \frac{h}{2n} \cdot n + 2 \cdot \frac{r}{2n} \cdot n \\ &= n^2 + h + r \end{aligned}$$

ma n^2 e h sono interi, r no in quanto è la mantissa di b che per ipotesi non è un numero intero, ed è pertanto una quantità strettamente compresa tra 0 e 1. Ne segue che $n^2 + 2an$ non risulta un numero intero e non può pertanto esserci una soluzione.
Resta da contare quante sono le soluzioni richieste dal problema.
Per un dato n ci sono $2n$ soluzioni, ognuna corrispondente ad un valore di k. In questo caso per ogni valore di n compreso tra 1 e 99 dobbiamo considerare tutte le soluzioni, alle quali poi aggiungere anche quella corrispondente a $(n, k) = (100, 0)$; le altre per $n = 100$ non sono da considerarsi in quanto eccedono il valore di 100. Il numero totale è dato dunque da:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 98 + 2 \cdot 99 + 1 &= 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 98 + 99) + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} + 1 \\ &= 9900 + 1 = \mathbf{9901} \end{aligned}$$

2. *(Girardot 2009, nazionale individuale colombiana)* **4767**
   Per calcolare tale somma, procediamo nel seguente modo:

   - $P(1) + P(2) + \ldots + P(8) + P(9) = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$
   - $P(10) + P(20) + \ldots + P(80) + P(90) = 45$, gli zeri si ignorano;
   - $P(11) + P(12) + \ldots + P(18) + P(19) = 45$, gli uni si ignorano;
   - $P(21) + P(22) + \ldots + P(28) + P(29) = 45 \cdot 2$, raccogliendo i due;
   - ....
   - $P(91) + P(92) + \ldots + P(98) + P(99) = 45 \cdot 9$, raccogliendo i nove;

   La somma per l'argomento che va da 1 a 99 è pertanto pari a:

   $$45 + 45 + 45 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 45 \cdot 47 = 2115$$

   Proseguendo:

   - $P(101) + \ldots + P(199) = P(1) + \ldots + P(99) = 2115$;
   - $P(201) + \ldots + P(299) = 2 \cdot [P(1) + \ldots + P(99)] = 2115 \cdot 2$;
   - ....
   - $P(901) + \ldots + P(999) = 9 \cdot [P(1) + \ldots + P(99)] = 2115 \cdot 9$;
   - $P(100) + P(200) + \ldots + P(800) + P(900) = 45$.

La somma per l'argomento che va da 1 a 999 è pertanto pari a:

$$2115 + 2115 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 45 = 97335$$

Infine:

- analoga sarà la somma per l'argomento andante da 1001 a 1999;
- la somma $P(2001) + \ldots + P(2009)$ sarà ancora pari a $45 \cdot 2 = 90$;
- $P(1000) = 1$, $P(2000) = P(2010) = P(2011) = 2$, la cui somma fa 7.

Il risultato finale sarà dunque pari a:

$$97335 \cdot 2 + 90 + 7 = 194767$$

3. *(Cesenatico 2005 squadre, problema 12 semifinale A)* **0991**
Procedendo a decrescere con i numeri di tre cifre più grandi, si verifica che non può essere:

   - 999, poiché evidentemente divisibile per 9;
   - 998, poiché pari;
   - 997, poiché la permutazione delle sue cifre 979 è pari a $89 \cdot 11$;
   - 996, pari;
   - 995, divisibile per 5;
   - 994, pari;
   - 993, divisibile per 3;
   - 992, pari.

   Si verifica invece che sia 991, sia 919, sia 199, sono primi, da cui la risposta al quesito.

4. *(Cesenatico 2005 squadre, problema 5 semifinale A, modificato)* **3899**
Un noto risultato afferma che, se i coefficienti di h e k, siano essi a e b, sono primi tra loro, come è il caso di 66 e 61, allora il più grande intero positivo che non si riesce a scrivere come combinazione lineare non negativa degli stessi è $ab - a - b$. Segue $66 \cdot 61 - 66 - 61 = 3899$.

5. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 7 finale, modificato)* **0256**
Si verifica che i primi termini della successione generata reiterando ripetutamente la funzione sono 1861, 256, 169, 256, 169, ... Per ogni $r \geq 1$, $f^{(r)}$ è dunque 256 se r è dispari, 169 se r è pari. Dalla parità di r nel testo del problema segue la risposta.

6. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 13 finale)* **9768**
Verifichiamo i vari casi:

- è presente un 2222; si può ottenere al più $2222 \cdot 2 \cdot 2 = 8888$;
- è presente un 222; possiamo ottenere:
  - $222 \cdot 22 \cdot 2 = 9768$;
  - $222 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 7104$
- sono presenti solo 22 e 2; si può avere:
  - $22 \cdot 22 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 7744$;
  - $22 \cdot 2^8 = 5632$;
  - $2^{13} = 8192$

7. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 15 finale, modificato)* **5808**

1795	2002	2011
2152	1936	1720
1861	1870	2077

8. *(Bocconi 2011, problema 18 semifinale)* **5362**
Effettuiamo successivamente le seguenti mosse:

numero mossa	gettoni presenti
0	1
1	0,2
2	0,1,3
3	0,1,2,4
4	0,1,2,3,5
5	0,1,2,3,4,6
6	0,1,2,3,4,5,7
7	1,1,3,4,5,7
8	1,2,4,5,7
9	1,3,5,7
10	2,5,7
11	2,4,6,7
12	3,6,7
13	3,5,7,7
14	4,7,7
15	4,6,7,8
16	5,7,8
17	5,7,7,9
18	6,7,9

A questo punto, alla mossa 18, abbiamo la stessa situazione della mossa 2, ma con i gettoni spostati di 6 caselle a destra. Per spostarli di $2010 = 6 \cdot 335$ caselle, è sufficiente dunque reiterare 335 volte le ultime

16 mosse della tabella cui sopra, arrivando ad avere, dopo altre 334 iterazioni per un totale di 5344 mosse, il seguente schema che riflette quanto già accade sopra dalla mossa 11 in poi:

numero mossa	gettoni presenti
5355	2006,2008,2010,2011
5356	2007,2010,2011
5357	2007,2009,2011,2011
5358	2008,2011,2011
5359	2008,2010,2011,2012
5360	2009,2011,2012
5361	2009,2011,2011,2013
5362	2010,2011,2013
5363	2010,2012
5364	2011

Le ultime due mosse sono necessarie per arrivare ad avere un unico gettone.
Tuttavia, per quanto riguarda questa ultima iterazione, è possibile risparmiare due passaggi, passando direttamente dalla mossa 5360 alla mossa 5363, cosa che nelle iterazioni precedenti non sarebbe stata vantaggiosa in quanto il nostro obiettivo era quello di shiftare la situazione e non già di ricondursi ad un unico gettone (obiettivo il cui raggiungimento intermedio avrebbe soltanto portato ad allungare il procedimento). Si può pertanto concludere con:

numero mossa	gettoni presenti
5360	2009,2011,2012
5361	2010,2012
5362	2011

da cui la risposta.
Omettiamo la dimostrazione del fatto che si tratta effettivamente del numero minimo di mosse, ovvero che non esistono strategie che permettano di ottenere il risultato attraverso una quantità inferiore di passaggi.

9. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 17 finale)* **0502**
Innanzitutto, poiché un numero non può cominciare con la cifra 0, nessuno di tali numeri più contenerla, in quanto sarebbe preceduta da almeno una cifra più grande. Constatato questo, si osserva che i numeri di n cifre che soddisfano tale condizione sono in quantità pari a tutte le n-uple di interi compresi tra 1 e 9, estremi inclusi, senza tenere conto dell'ordine, in quanto l'ordine crescente da sinistra verso destra è l'unico ammissibile. Naturalmente un numero di almeno 10

cifre contiene o uno zero, o due cifre coincidenti, per cui $n \leq 9$. Il risultato è dunque dato dalla quantità:

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\ldots+\binom{9}{9}=\sum_{i=2}^{9}\binom{9}{i}=\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}-\binom{9}{0}-\binom{9}{1}=2^9-1-9=502$$

dove si è utilizzata la nota formula per cui la somma di tutti gli elementi della riga j-esima del triangolo di Tartaglia è pari a 2^j.

10. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 1 finale)* **0793**
Incominciamo dalla 1 verticale. I cubi di tre cifre sono: $125, 216, 343, 512, 729$. Di questi però escludiamo subito 343, in quanto contiene due cifre uguali, e 729, poiché la definizione 3 orizzontale ci chiede un numero la cui somma delle cifre è 9, che si troverebbe ad essere già la prima cifra dello stesso. Possiamo anche affermare che non può essere 216, in tal caso infatti la 1 orizzontale potrebbe valere 225, da escludere avendo due cifre uguali, 256, da escludere poiché abbiamo già utilizzato il 6, 289, da escludere poiché la 2 verticale deve contenere cifre solo pari. Infine non può essere nemmeno 125, in quanto la 3 orizzontale farebbe sì che le altre due cifre possano essere soltanto $(3, 1)$ o $(2, 2)$, ma abbiamo già utilizzato sia la cifra 1 che la cifra 2. Pertanto deve essere 512. Di conseguenza la 1 orizzontale è 576 (529 non può essere per quanto richiesto dalla 2 verticale), la 3 orizzontale è 234 (1, 2, 5, 6 sono già state utilizzate, tra le due possibilità che restano si sceglie ancora in base a quanto prescritto dalla 2 verticale), la 2 verticale è 684 (l'8 è l'unica cifra pari rimasta libera), la casella centrale contiene la rimanente cifra 9. Lo schema completo è:

^{1} 5	**7**	^{2} 6
1	**9**	8
^{3} 2	**3**	4

11. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 20 finale)* **0011**

12. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 19 finale)* **0029**

13. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 14 finale)* **1000**

14. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 16 finale, modificato)* **0900**
Caratterizziamo intanto tutti gli interi positivi a minori di 30 tali per cui $\mathtt{MCD}(a, 30) = 1$. Essi sono: $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$; la somma delle rispettive frazioni è pari a:

$$\frac{1}{30}+\frac{7}{30}+\frac{11}{30}+\frac{13}{30}+\frac{17}{30}+\frac{19}{30}+\frac{23}{30}+\frac{29}{30}=4$$

osservando rapidamente che l'ultimo termine è il complemento a uno del primo, il penultimo quello del secondo, il terzultimo quello del terzo, e il quartultimo quello del quarto.
Questa, in particolare, è la somma di tutti i razionali positivi che, ridotti ai minimi termini, hanno la forma $\frac{a}{30}$, e sono minori di 1.
Per quanto riguarda i razionali maggiori di 1 siffatti, sono irriducibili se e soltanto se il resto della divisione di a per 30 è uno degli otto numeri sopra citati. Scrivendo ogni numero come somma della sua parte intera e di una frazione propria (numero misto), la cui scrittura è unica per l'unicità di quoziente e resto in una divisione euclidea, possiamo dire che, per ogni n i razionali compresi tra n e $n+1$ che soddisfano tale condizione, sono tutte e sole le quantità addendi della seguente somma, che restituisce appunto la somma di tutti i razionali positivi che, ridotti ai minimi termini, hanno la forma $\frac{a}{30}$, e sono compresi tra n e $n+1$:

$$\left(n+\frac{1}{30}\right)+\left(n+\frac{7}{30}\right)+\left(n+\frac{11}{30}\right)+\left(n+\frac{13}{30}\right)+$$
$$+\left(n+\frac{17}{30}\right)+\left(n+\frac{19}{30}\right)+\left(n+\frac{23}{30}\right)+\left(n+\frac{29}{30}\right)=8n+4$$

Supponiamo ora che il limite superiore imposto dal problema sia M. In tal caso quelli da sommare sono tutti e soli i numeri cui sopra la cui parte intera è compresa, estremi inclusi, tra 0 e $M-1$, ovvero:

$$\sum_{n=0}^{M-1}(8n+4)=4\cdot\sum_{n=0}^{M-1}(2n+1)=4M^2$$

tenuto conto del notevole risultato che la somma dei primi k numeri dispari positivi è k^2. Poiché in questo caso $M=15$, $4M^2=900$.

15. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 12 finale, modificato)* **6084**
Siano (x_1,y_1,z_1) le coordinate del vertice del cubo più vicino all'origine, e siano (x_2,y_2,z_2) quelle del vertice opposto. Tali posizioni determinano univocamente il cubo, in quanto gli altri sei vertici sono dati rispettivamente da:

$$(x_1,y_1,z_2),(x_1,y_2,z_1),(x_2,y_1,z_1),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_1,z_2),(x_2,y_2,z_1)$$

Ora, affinché si tratti effettivamente di un cubo, dovrà essere:

$$x_2-x_1=y_2-y_1=z_2-z_1=c$$

dunque $x_2=x_1+c$, $y_2=y_1+c$, $z_2=z_1+c$.
c può assumere tutti i valori interi compresi tra 1 e quello tale per cui almeno una tra le quantità x_2,y_2,z_2 raggiunge il valore 12 (per il successivo, infatti, raggiungerebbe il valore 13 e uscirebbe dalle limitazioni

del problema).
È quindi possibile costruire esattamente 1 cubo siffatto se si ha che $\max\{x_1, y_1, z_1\} := M = 11$, 2 cubi se $M = 10$, in generale k cubi se $M = 12 - k$.
D'altro canto, le terne (x_1, y_1, z_1) il cui elemento massimo vale esattamente 11, sono date dal numero di terne in cui le tre quantità variano liberamente tra 0 e 11, da cui vanno escluse quelle in cui le tre quantità variano solo tra 0 e 10, in quanto una di esse deve essere appunto pari ad 11; sono pertanto in numero di $12^3 - 11^3$.
Generalizzando, le terne (x_1, y_1, z_1) il cui elemento massimo vale esattamente h, sono date dal numero di terne in cui le tre quantità variano liberamente tra 0 e h, da cui vanno escluse quelle in cui le tre quantità variano solo tra 0 e $h - 1$, in quanto una di esse deve essere appunto pari ad h; sono pertanto in numero di $(h + 1)^3 - h^3$.
Il numero totale di cubi può essere dunque scritto come:

$$(12^3 - 11^3) \cdot 1 + (11^3 - 10^3) \cdot 2 + \ldots + (2^3 - 1^3) \cdot 11 + (1^3 - 0^3) \cdot 12$$

Vediamo ora come calcolare questa quantità.

Primo Metodo È possibile calcolarla direttamente svolgendo tutti i conti così come stanno:

$$397{\cdot}1+331{\cdot}2+271{\cdot}3+217{\cdot}4+169{\cdot}5+127{\cdot}6+91{\cdot}7+61{\cdot}8+37{\cdot}9+19{\cdot}10+7{\cdot}11+1{\cdot}12$$

$$= 397+662+813+868+845+762+637+488+333+190+77+12 = 6084$$

Secondo Metodo Consiste nello sviluppare i prodotti e nel combinare opportunamente i termini:

$$\begin{aligned} & (12^3 - 11^3) \cdot 1 + (11^3 - 10^3) \cdot 2 + \ldots + (2^3 - 1^3) \cdot 11 + (1^3 - 0^3) \cdot 12 \\ = \ & 12^3 - 11^3 + 2 \cdot 11^3 - 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3 + \ldots - 11 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^3 - 12 \cdot 0^3 \\ = \ & 12^3 + 11^3 + 10^3 + \ldots + 1^3 - 12 \cdot 0^3 = 12^3 + 11^3 + 10^3 + \ldots + 1^3 \end{aligned}$$

e tenuta in considerazione ora la formula:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

otteniamo:

$$12^3+11^3+10^3+\ldots+1^3 = \sum_{i=1}^{12} i^3 = \frac{[12 \cdot 13]^2}{4} = \frac{144 \cdot 169}{4} = 36{\cdot}169 = 6084$$

Terzo Metodo Innanzitutto si riscrive la somma come sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{12} \{[(13 - i)^3 - (12 - i)^3] \cdot i\}$$

poi si trasforma la differenza di cubi in una somma di monomi di secondo grado, tenuto conto del fatto che la differenza tra gli argomenti è 1:

$$\sum_{i=1}^{12}\{[(13-i)^2+(12-i)^2+(13-i)(12-i)]\cdot i\}$$

Si sviluppano in seguito i conti ottenendo:

$$\sum_{i=1}^{12}\{[i^2-26i+169+i^2-24i+144+i^2-25i+156]\cdot i\}$$

$$\sum_{i=1}^{12}\{[3i^2-75i+469]\cdot i\}=\sum_{i=1}^{12}[3i^3-75i^2+469i]=3\cdot\sum_{i=1}^{12}i^3-75\sum_{i=1}^{12}i^2+469\sum_{i=1}^{12}i$$

Tenendo conto ora delle note formule:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}i &= \frac{n(n+1)}{2}\\ \sum_{i=1}^{n}i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \sum_{i=1}^{n}i^3 &= \frac{[n(n+1)]^2}{4}\end{aligned}$$

possiamo calcolare:

$$3\cdot\sum_{i=1}^{12}i^3-75\sum_{i=1}^{12}i^2+469\sum_{i=1}^{12}i=3\cdot\frac{144\cdot 169}{4}-75\cdot\frac{12\cdot 13\cdot 25}{6}+469\cdot\frac{12\cdot 13}{2}$$

$$=3\cdot 36\cdot 169-75\cdot 2\cdot 13\cdot 25+469\cdot 6\cdot 13=18252-48750+36582=6084$$

16. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 4 finale, modificato)* **0064**
Consideriamo di sviluppare tutti i prodotti presenti e di determinare quali moltiplicazioni possano portare ad un termine di grado 2011. Si verifica, sommando i termini di grado più alto di ogni fattore, che il polinomio in questione ha grado 2160; questo implica che i termini dei fattori in $x^{1024}, x^{512}, x^{256}$, sono necessari per raggiungere il grado che ci prefiggiamo, infatti escludendo anche uno solo di essi otteniamo al più un monomio di grado $2160-256=1904$. Possiamo dunque studiare, ottenendo lo stesso risultato, il termine di grado 2011 del polinomio: $A(x)=P_1(x)\cdot Q_2(x)$, dove:

$$\begin{aligned}P_1(x) &= (1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)^3(1+x^{16})(1+x^{32})^4\\ Q_2(x) &= (1+x^{64})(1+x^{128})\cdot x^{256}\cdot x^{512}\cdot x^{1024}\end{aligned}$$

Inoltre possiamo scrivere $R_2(x) = x^{1792} \cdot Q_2(x)$, in maniera tale che $A(x) = x^{1792} \cdot P_1(x) \cdot R_2(x)$. Sia anche $B(x) = P_1(x) \cdot R_2(x)$. Il termine di grado 2011 di $A(x)$ corrisponde al termine di grado $2011 - 1792 = 219$ di $B(x)$, differendo i due polinomi per tale costante moltiplicativa.
Ci limitiamo ora a riportare lo sviluppo di $B(x)$, ottenuto con un CAS, per verificare appunto la risposta al problema:

```
x^368+2*x^367+2*x^366+2*x^365+2*x^364+2*x^363+2*x^362+2*x^361+4*x^360+
6*x^359+6*x^358+6*x^357+6*x^356+6*x^355+6*x^354+6*x^353+7*x^352+8*x^351+
8*x^350+8*x^349+8*x^348+8*x^347+8*x^346+8*x^345+8*x^344+8*x^343+8*x^342+
8*x^341+8*x^340+8*x^339+8*x^338+8*x^337+11*x^336+14*x^335+14*x^334+14*x^333+
14*x^332+14*x^331+14*x^330+14*x^329+20*x^328+26*x^327+26*x^326+26*x^325+
26*x^324+26*x^323+26*x^322+26*x^321+29*x^320+32*x^319+32*x^318+32*x^317+
32*x^316+32*x^315+32*x^314+32*x^313+32*x^312+32*x^311+32*x^310+32*x^309+
32*x^308+32*x^307+32*x^306+32*x^305+35*x^304+38*x^303+38*x^302+38*x^301+
38*x^300+38*x^299+38*x^298+38*x^297+44*x^296+50*x^295+50*x^294+50*x^293+
50*x^292+50*x^291+50*x^290+50*x^289+53*x^288+56*x^287+56*x^286+56*x^285+
56*x^284+56*x^283+56*x^282+56*x^281+56*x^280+56*x^279+56*x^278+56*x^277+
56*x^276+56*x^275+56*x^274+56*x^273+57*x^272+58*x^271+58*x^270+58*x^269+
58*x^268+58*x^267+58*x^266+58*x^265+60*x^264+62*x^263+62*x^262+62*x^261+
62*x^260+62*x^259+62*x^258+62*x^257+63*x^256+64*x^255+64*x^254+64*x^253+
64*x^252+64*x^251+64*x^250+64*x^249+64*x^248+64*x^247+64*x^246+64*x^245+
64*x^244+64*x^243+64*x^242+64*x^241+64*x^240+64*x^239+64*x^238+64*x^237+
64*x^236+64*x^235+64*x^234+64*x^233+64*x^232+64*x^231+64*x^230+64*x^229+
64*x^228+64*x^227+64*x^226+64*x^225+64*x^224+64*x^223+64*x^222+64*x^221+
64*x^220+64*x^219+64*x^218+64*x^217+64*x^216+64*x^215+64*x^214+64*x^213+
64*x^212+64*x^211+64*x^210+64*x^209+64*x^208+64*x^207+64*x^206+64*x^205+
64*x^204+64*x^203+64*x^202+64*x^201+64*x^200+64*x^199+64*x^198+64*x^197+
64*x^196+64*x^195+64*x^194+64*x^193+64*x^192+64*x^191+64*x^190+64*x^189+
64*x^188+64*x^187+64*x^186+64*x^185+64*x^184+64*x^183+64*x^182+64*x^181+
64*x^180+64*x^179+64*x^178+64*x^177+64*x^176+64*x^175+64*x^174+64*x^173+
64*x^172+64*x^171+64*x^170+64*x^169+64*x^168+64*x^167+64*x^166+64*x^165+
64*x^164+64*x^163+64*x^162+64*x^161+64*x^160+64*x^159+64*x^158+64*x^157+
64*x^156+64*x^155+64*x^154+64*x^153+64*x^152+64*x^151+64*x^150+64*x^149+
64*x^148+64*x^147+64*x^146+64*x^145+64*x^144+64*x^143+64*x^142+64*x^141+
64*x^140+64*x^139+64*x^138+64*x^137+64*x^136+64*x^135+64*x^134+64*x^133+
64*x^132+64*x^131+64*x^130+64*x^129+64*x^128+64*x^127+64*x^126+64*x^125+
64*x^124+64*x^123+64*x^122+64*x^121+64*x^120+64*x^119+64*x^118+64*x^117+
64*x^116+64*x^115+64*x^114+64*x^113+63*x^112+62*x^111+62*x^110+62*x^109+
62*x^108+62*x^107+62*x^106+62*x^105+60*x^104+58*x^103+58*x^102+58*x^101+
58*x^100+58*x^99+58*x^98+58*x^97+57*x^96+56*x^95+56*x^94+56*x^93+56*x^92+
56*x^91+56*x^90+56*x^89+56*x^88+56*x^87+56*x^86+56*x^85+56*x^84+56*x^83+
56*x^82+56*x^81+53*x^80+50*x^79+50*x^78+50*x^77+50*x^76+50*x^75+50*x^74+
50*x^73+44*x^72+38*x^71+38*x^70+38*x^69+38*x^68+38*x^67+38*x^66+38*x^65+
```

```
35*x^64+32*x^63+32*x^62+32*x^61+32*x^60+32*x^59+32*x^58+32*x^57+32*x^56+
32*x^55+32*x^54+32*x^53+32*x^52+32*x^51+32*x^50+32*x^49+29*x^48+26*x^47+
26*x^46+26*x^45+26*x^44+26*x^43+26*x^42+26*x^41+20*x^40+14*x^39+14*x^38+
14*x^37+14*x^36+14*x^35+14*x^34+14*x^33+11*x^32+8*x^31+8*x^30+8*x^29+
8*x^28+8*x^27+8*x^26+8*x^25+8*x^24+8*x^23+8*x^22+8*x^21+8*x^20+8*x^19+
8*x^18+8*x^17+7*x^16+6*x^15+6*x^14+6*x^13+6*x^12+6*x^11+6*x^10+6*x^9+
4*x^8+2*x^7+2*x^6+2*x^5+2*x^4+2*x^3+2*x^2+2*x+1
```

17. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 8 finale, modificato)* **1128**
PRIMA SOLUZIONE Tenendo conto del fatto che 47 è un numero primo, procediamo per tentativi, fino a trovare un numero che abbia effettivamente almeno 63 divisori, utilizzando la nota formula che, nota la scomposizione in fattori primi di un intero maggiore di 1, ne restituisce il numero esatto di divisori positivi:

n	scomposizione $47n$	numero divisori $47^2 \cdot n^2$
1	47	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
3	$3 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
4	$2^2 \cdot 47$	$(2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 15$
5	$5 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
6	$2 \cdot 3 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^3 = 27$
7	$7 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
8	$2^3 \cdot 47$	$(2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 21$
9	$3^2 \cdot 47$	$(2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 15$
10	$2 \cdot 5 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^3 = 27$
11	$11 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
12	$2^2 \cdot 3 \cdot 47$	$(2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 1 + 1)^2 = 45$
13	$13 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
14	$2 \cdot 7 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^3 = 27$
15	$3 \cdot 5 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^3 = 27$
16	$2^4 \cdot 47$	$(2 \cdot 4 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 27$
17	$17 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
18	$2 \cdot 3^2 \cdot 47$	$(2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 1 + 1)^2 = 45$
19	$19 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
20	$2^2 \cdot 5 \cdot 47$	$(2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 1 + 1)^2 = 45$
21	$3 \cdot 7 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^3 = 27$
22	$2 \cdot 11 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^3 = 27$
23	$23 \cdot 47$	$(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$
24	$2^3 \cdot 3 \cdot 47$	$(2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 1 + 1)^2 = 63$

SECONDA SOLUZIONE Consideriamo sempre la notazione precedente. Sia la scomposizione in fattori primi di n:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

con $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Ne segue che quella di $N = 47^2 \cdot n^2$, supposto che n non contenga il fattore 47 nella sua scomposizione, è:

$$47^2 \cdot n^2 = 47^2 \cdot p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{2\alpha_r}$$

Se invece n contiene il fattore 47, sia per comodità di notazione $p_r = 47$, e di conseguenza:

$$47^2 \cdot n^2 = 47^{2+2\alpha_r} \cdot p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{r-1}^{2\alpha_{r-1}}$$

Trattiamo il primo caso. Stanti così le cose, il numero di divisori di N corrisponde a:

$$3 \cdot (2\alpha_1 + 1) \cdot (2\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_r + 1)$$

Dovendo esso essere almeno pari a 63, possiamo scrivere:

$$(2\alpha_1 + 1) \cdot (2\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_r + 1) \geq 21$$

Consideriamo il numero di destra, che può essere un qualunque dispari maggiore o uguale a 21.

- Se lo scriviamo come prodotto di un unico fattore, ovvero sè stesso, sia esso m, dovrà necessariamente essere $r = 1, 2\alpha_1 + 1 = m \geq 21$, e quindi $\alpha_1 \geq 10$. Ponendo il valore più piccolo ammissibile per p_1, ovvero 2, risulta $n \geq 2^{10} = 1024$. Dunque, in questo caso, n deve valere almeno 1024.
- Se lo scriviamo come prodotto di almeno tre fattori distinti, sarà in ogni caso $r \geq 3, 2\alpha_1 + 1 \geq 3, 2\alpha_2 + 1 \geq 3, 2\alpha_3 + 1 \geq 3$, ovvero $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 1$. Assumendo i valori più piccoli per p_1, p_2, p_3, rispettivamente $2, 3, 5$, risulta $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; in questo caso n deve pertanto valere almeno 30. Effettivamente il numero $30^2 \cdot 47^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 47^2$ possiede $3^4 = 81$ divisori; ciò rende peraltro di scarso interesse il caso, scorporato precedentemente, in cui 47 divide n, visto che in tal caso $n \geq 47$ e qui abbiamo trovato una soluzione accettabile in cui $n < 47$.
- Se invece lo scriviamo come prodotto di esattamente due fattori distinti, si avrà $r = 2, 2\alpha_1 + 1 = f_1, 2\alpha_2 + 1 = f_2$, chiamati f_1 e f_2 tali fattori, con naturalmente $f_1 f_2 = m$. I valori più piccoli che possono assumere sono $(\phi_1, \phi_2) = (3, 7)$ e $(\Phi_1, \Phi_2) = (5, 5)$; tutte le altre coppie (F_1, F_2) sono infatti tali per cui $(\phi_1, \phi_2) \leq (F_1, F_2)$ oppure $(\Phi_1, \Phi_2) \leq (F_1, F_2)$, avendo posto la relazione d'ordine tra le coppie come quella per cui $(a, b) \leq (c, d)$ se $a \leq c, b \leq d$. Assumendo ancora i valori più piccoli per p_1 e p_2, cioè 2 e 3, si presentano i casi:

- $(2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1) = (7,3) \to (\alpha_1, \alpha_2) = (3,1)$: in tal caso $n = 2^3 \cdot 3 = 24$.
- $(2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1) = (5,5) \to (\alpha_1, \alpha_2) = (2,2)$: in tal caso $n = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Il valore più piccolo di n ammissibile è dunque 24.

18. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 6 finale)* **2143**

19. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 3 finale)* **0015**

20. *(Cesenatico 2006 squadre, problema 10 finale)* **0400**

3 Elenco delle tipologie

Per ogni problema viene indicata la tipologia a cui appartiene.

1.

4 Foglietti risposte

A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI
Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _
Numero problema: _ _	Numero problema: _ _	Numero problema: _ _
Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _
Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐
SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011
A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI
Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _
Numero problema: _ _	Numero problema: _ _	Numero problema: _ _
Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _
Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐
SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011
A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI
Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _
Numero problema: _ _	Numero problema: _ _	Numero problema: _ _
Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _
Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐
SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011
A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI
Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _
Numero problema: _ _	Numero problema: _ _	Numero problema: _ _
Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _
Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐
SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011
A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI	A.S. MATHESIS SEZIONE BETTAZZI
Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _	Numero squadra: _ _
Numero problema: _ _	Numero problema: _ _	Numero problema: _ _
Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _	Soluzione problema: _ _ _ _
Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐	Problema jolly? ☐
SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011	SIMULAZIONE 18 APRILE 2011