UNIVERSITA' DELLA CALABRIA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

- Seconda prova scritta di CALCOLO 3 -

APPELLO DEL 16/12/2005

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA O DATA DI NASCITA: ....

IMPORTANTE

Il presente fascicolo contiene gli esercizi.

I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi: un campo vuoto significa zero punti

Nei grafici é fondamentale il posizionamento dei vari elementi mentre sono irrilevanti i fattori di scala.

Gli esercizi valgono 25 punti il primo, 25 punti il secondo, 12 punti il terzo, 10 punti il quarto, 8 il quinto.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

CALCOLO 3 - 16/12/2005 **A**

Esercizio 1. Siano

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

e per $k \in (0,1)$

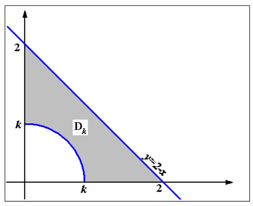
$$D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \geq k^2,\ x+y \leq 2\} \ .$$

Si chiede

una rappresentazione grafica di D_k;

Svolgimento

un cambiamento di variabili che consenta il calcolo dell'integrale di $f(x,y)$ su D_k;



Svolgimento

$$\begin{cases} v = r\cos\theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ u = r\sin\theta & k \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta+\sin\theta} \end{cases}$$

Per ottenere l'intervallo in cui varia r in funzione di θ, si sono sostituiti i valori di x e y in funzione di r e θ nella relazione

$$x^2+y^2 \geq k^2,$$

ottenendo:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \geq k^2 \quad \Longrightarrow \quad r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \geq k^2 \quad \Longrightarrow \quad r^2 \geq k^2 \quad \Longrightarrow \quad (\text{poiché } r>0) \ \ r \geq k$$

e nella relazione

$$x+y < 2 \ ,$$

ottenendo:

$$r\cos\theta + r\sin\theta < 2 \quad \Longrightarrow \quad r(\cos\theta+\sin\theta) < 2 \quad \Longrightarrow \quad r < \frac{2}{\cos\theta+\sin\theta} \ .$$

Indicata con ψ la trasformazione che esprime x e y in funzione di r e θ, nelle nuove variabili si ha:

$$\psi^{-1}(D_k) = \left\{(r,\theta) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ k \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}\right\}.$$

Inoltre, come già calcolato a lezione, si ha:

$$|det\ D\psi(\rho,\theta)| = \left|det\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r \ .$$

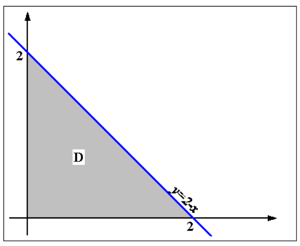
il valore dell'integrale di $f(x,y)$ esteso a D_k.
Svolgimento

$$\begin{aligned}
\int_{D_k} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_{\psi^{-1}(D_k)} \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} r \quad dr\,d\theta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_k^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r^2(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \quad dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_k^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} (\cos\theta+\sin\theta) \quad dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta)[r]\Big|_k^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} d\theta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta)\left(\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta} - k\right) d\theta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - k(\cos\theta+\sin\theta))\,d\theta \\
&= \left(2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - k[-\sin\theta+\cos\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \\
&= 2\frac{\pi}{2} + k\Big(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\Big) \\
&= \pi + k(1+1) = \pi + 2k
\end{aligned}$$

Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2\}\ .$$

Si chiede:
una rappresentazione grafica di D;
Svolgimento



il valore dell'integrale di $f(x,y)$ esteso a D.
Svolgimento

$$\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dx\,dy = \lim_{k\to 0}\int_{D_k} \frac{x+y}{x^2+y^2}dx\,dy = \lim_{k\to 0}(\pi+2k) = \pi\ .$$

CALCOLO 3 - 16/12/2005

A

Esercizio 2. Sia ω la forma differenziale definita da:

$$\omega(x,y) = \left[\frac{2x}{x^2+(y-4)^2} + \frac{y}{x^2+y^2}\right] dx + \left[\frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2} - \frac{x}{x^2+y^2}\right] dy \ .$$

Si chiede di

calcolare l'integrale di ω lungo la circonferenza di raggio 1, centrata nell'origine e percorsa una sola volta in senso antiorario

Svolgimento

Indichiamo con C la circonferenza parametrizzata da: $\gamma(t) = (\cos\ t,\ \sin\ t),\ t \in [0, 2\pi]$.
La forma differenziale può essere scritta come differenza di due forme differenziali: $\omega(x,y) = \omega_1 - \omega_2$, dove:

$$\omega_1(x,y) = \left[\frac{2x}{x^2+(y-4)^2}\right] dx + \left[\frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2}\right] dy \quad \text{e} \quad \omega_2(x,y) = \left[-\frac{y}{x^2+y^2}\right] dx + \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] dy \ .$$

Da cui si ottiene: $\int_\gamma \omega\ ds = \int_\gamma \omega_1\ ds - \int_\gamma \omega_2\ ds$.
Osserviamo prima di tutto che ω_2 è la forma nota definita in $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ e dunque: $\int_\gamma \omega_2\ ds = 2\pi$.
Inoltre si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega_1\ ds &= \int_0^{2\ \pi} \left(\frac{-2\sin t\ \cos t}{\cos^2 t + (\sin t - 4)^2} + \frac{(2\sin t - 8)\cos t}{\cos^2 t + (\sin t - 4)^2} \right) dt \\
&= \int_0^{2\ \pi} \left(\frac{-2\sin t\ \cos t + 2\sin t\ \cos t - 8\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t - 8\sin t + 16} \right) dt \\
&= \int_0^{2\ \pi} \left(\frac{-8\cos t}{-8\sin t + 17} \right) dt \\
&= \int_0^{2\ \pi} \left(\frac{-8\cos t}{-8\sin t + 17} \right) dt \\
&= \Big[\ln|-8\sin t + 17| \Big]_0^{2\ \pi} \\
&= \Big[\ln(17) - \ln(17) \Big] = 0
\end{aligned}$$

In conclusione si ottiene: $\int_\gamma \omega\ ds = \int_\gamma \omega_1\ ds - \int_\gamma \omega_2\ ds = -2\pi$.

detto D il dominio di definizione di Ω, dire se ω é esatta in D (motivare la risposta)

Svolgimento

Il dominio di definizione di ω è $D = R^2 \setminus \{(0,0), (0,4)\}$.
La forma differenziale non è esatta in D perchè esiste una curva chiusa contenuta in D (vedi punto precedente) lungo cui l'integrale di ω non è nullo.

CALCOLO 3 - 16/12/2005

A

calcolare una primitiva di ω

Svolgimento

Poiché ω non è esatta in D, una sua primitiva, se esiste, deve essere definita in un sottoinsieme di D.
Notiamo che di ω_2 possiamo subito scrivere una primitiva definita per esempio in $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$:

$$\phi_{\omega_2}(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) .$$

Passiamo a calcolare una primitiva di ω_1.
Cerchiamo una funzione $\phi_{\omega_1}(x,y)$ tale che:

$$\frac{\partial(\phi_{\omega_1}(x,y))}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+(y-4)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\phi_{\omega_1}(x,y))}{\partial y} = \frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2} .$$

Per cui calcoliamo la primitiva integrando $\frac{\partial(\phi(x,y))}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+(y-4)^2}$ rispetto a x:

$$\phi_{\omega_1}(x,y) = \int \left(\frac{2x}{x^2+(y-4)^2}\right) dx = \ln\left(x^2+(y-4)^2\right) + g(y)$$

Ora deriviamo parzialmente rispetto a y la funzione trovata:

$$\frac{\partial(\phi_{\omega_1}(x,y))}{\partial y} = \frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2} + g'(y)$$

Dalla seconda uguaglianza $\frac{\partial(\phi_{\omega_1}(x,y))}{\partial y} = \frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2}$ si ha:

$$\frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2} + g'(y) = \frac{2y-8}{x^2+(y-4)^2}$$

Da cui $g'(y) = 0$ ovvero $g(y) = c$ dove c è una costante, $c \in R$.
Quindi possiamo concludere che una primitiva di ω_1 è:

$$\phi_{\omega_1}(x,y) = \ln\left(x^2+(y-4)^2\right) + c .$$

Osserviamo che il dominio di $\phi_{\omega_1}(x,y)$ è $R^2 \setminus (0,4)$, che coincide con quello di ω_1 e pertanto ω_1 è esatta in $R^2 \setminus (0,4)$.
Una primitiva di ω (definita per esempio in B) è

$$\phi(x,y) = \phi_{\omega_1}(x,y) - \phi_{\omega_2}(x,y) = \ln\left(x^2+(y-4)^2\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c .$$

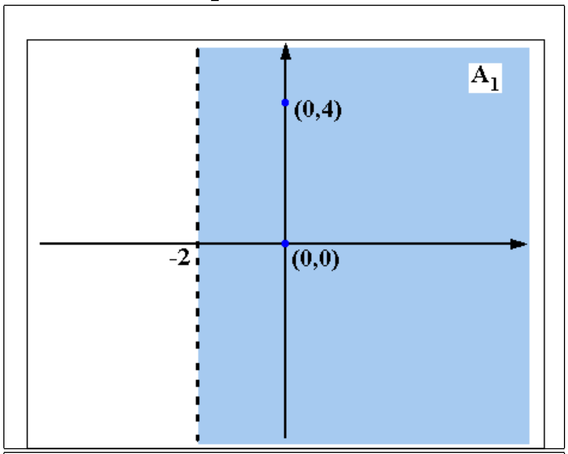
dire in quali dei seguenti sottoinsiemi del piano ω è esatta (motivare la risposta)

- $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2\}$
- $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2\}$
- $A_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2\}$

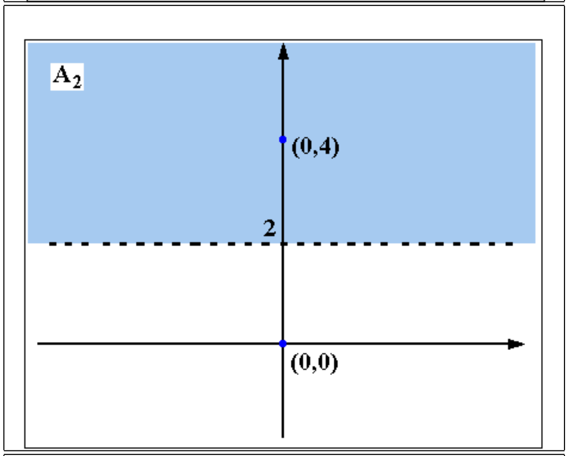
Svolgimento

Consideriamo i domini A_1, A_2 e A_3 intersecati con il dominio di definizione della forma.
Ovvero studiamo l'esattezza della forma in $A_1 \cap D$, $A_2 \cap D$ e $A_3 \cap D$.
La non esattezza della forma ω dipende, come visto dal punto precedente, dalla forma ω_2, infatti ω_1 è esatta in D.
Quindi la forma ω è esatta in ogni sottoinsieme di D in cui è esatta ω_2.

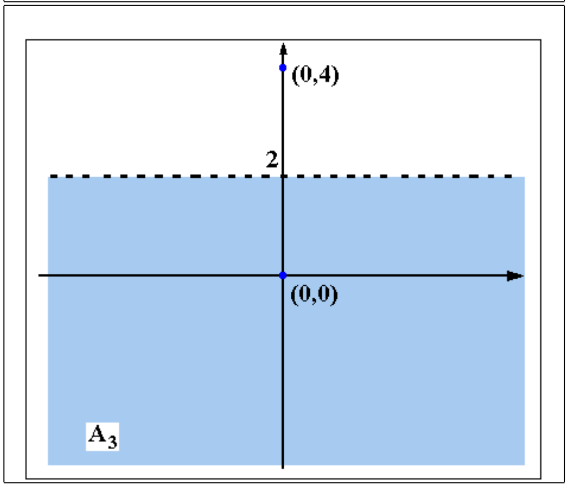
In $A_1 \cap D$ la forma non è esatta



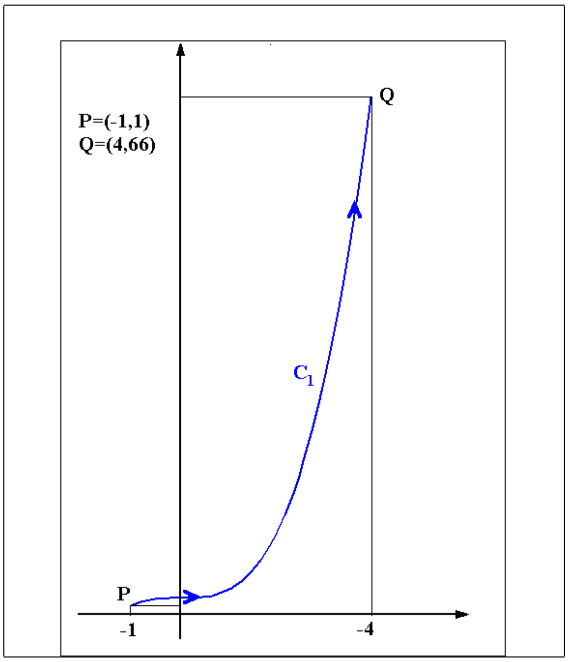
In $A_2 \cap D$ la forma è esatta



In $A_3 \cap D$ la forma non è esatta



Siano C_1 la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t, t^3 + 2),\ t \in [-1, 4]$ e C_2 la curva disegnata in figura.
calcolare l'integrale di ω lungo C_1 e C_2
Svolgimento

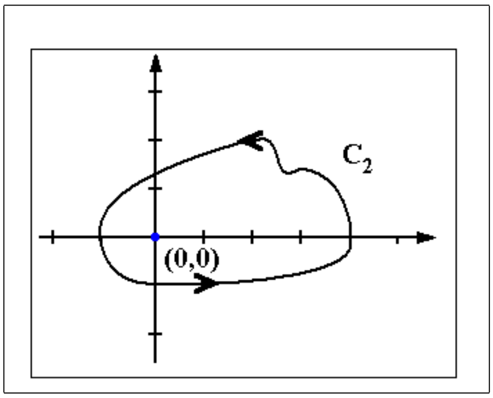


Lungo C_1

La curva è contenuta in un dominio che non contiene $(0,0)$ quindi ω è esatta in tale dominio, pertanto l'integrale non dipende dal percorso ma dal punto iniziale $P = (-1, 1)$ e finale $Q = (4, 66)$.

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \omega\ ds &= \phi(4,66) - \phi(-1,1) = \\ &= \ln\left(4^2 + (66-4)^2\right) + \arctan\left(\frac{4}{66}\right) - \ln\left((-1)^2 + (1-4)^2\right) + \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \\ &= \ln\left(16 + (62)^2\right) + \arctan\left(\frac{4}{66}\right) - \ln(1+9) + \arctan(-1) = \\ &= \ln(386) - \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{2}{32}\right)\end{aligned}$$

Lungo C_2



Osserviamo che la curva contiene il punto $(0,0)$. Quindi

$$\int_{C_2} \omega\ ds = \int_{C_2} \omega_1\ ds - \int_{C_2} \omega_2\ ds = 0 - 2\pi = -2\pi$$

Esercizio 3. Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x^2 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Risolviamo l'equazione con il metodo della separazione delle variabili.

$$y' = (1+y^2)x^2 \Longrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = x^2\ dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x^2\ dx \Longrightarrow \arctan(y) = \frac{x^3}{3} + c\ .$$

Osserviamo che per avere senso l'uguaglianza si deve avere che $\frac{x^3}{3} + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ perché la funzione $y = \arctan(x)$ restituisce valore in questo intervallo.
Da cui segue che la soluzione dell'equazione è:

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + c\right)\ .$$

Risolviamo il problema di Cauchy imponendo la condizione iniziale y(0)=0:

$$y(0) = \tan\left(\frac{0^3}{3} + c\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = k\pi \quad k \in Z\ .$$

Si osserva che

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + k\pi\right) = \tan\left(\frac{x^3}{3}\right)\ ,$$

da cui la soluzione al problema di Cauchy è:

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

dire qual é il piú grande intervallo su cui é definita la soluzione (motivare la risposta)
Svolgimento

Siè detto in precedenza che nella soluzione dell'equazione si deve avere che $\frac{x^3}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; pertanto il più grande intervallo in cui è definita la soluzione è:

$$\frac{x^3}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi} < x < \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}\ .$$

CALCOLO 3 - 16/12/2005

A

Esercizio 4.
Sia $y(x)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x^2 + x^4 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si chiede di
studiare crescenza e decrescenza di $y(x)$
Svolgimento

$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad (1+y^2)x^2+x^4 > 0 \quad \Rightarrow$ sempre positiva perché somma di quadrati .

La soluzione è sempre crescente.

calcolare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $y(x)$ **nell'origine**
Svolgimento

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $y(x)$ nell'origine è uguale a $y'(0) = 0$.

dire se la soluzione é limitata (motivare la risposta)
Svolgimento

Osserviamo che $y' = (1+y^2)x^2 + x^4 \geq (1+y^2)x^2$ e quindi:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} \geq \int x^2 dx$$

e, ripetendo i passaggi dell'esercizio precedente, si ottiene:

$$y(x) \geq \tan\left(\frac{x^3}{3}\right) .$$

Dall'ultima disuguaglianza si ottiene che, poiché $\tan\left(\frac{x^3}{3}\right)$ è una funzione illimitata, allora anche $y(x)$ deve essere illimitata.

dire se la soluzione é una soluzione in grande (motivare la risposta)
Svolgimento

Poiché l'equazione è definita su tutto $\mathbb{R}$ mentre il dominio della soluzione è strettamente contenuto in $\mathbb{R}$, allora non si ha una soluzione in grande.

Esercizio 5. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{n(x-3)^n}{2n^2+1}$$

Svolgimento
Il raggio di convergenza della serie è $r=\frac{1}{l}$ dove l può essere calcolato utilizzando una delle due formule

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

e

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Nella serie in questione $a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n}{2n^2+1}$, dunque

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n}{2n^2+1}\right|}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2n^2+1}\right|}=\frac{1}{4}$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie è $r=\frac{1}{l}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$
La serie converge per

$$|x-3|<4 \qquad \Rightarrow \qquad -4<x-3<4 \qquad \Rightarrow \qquad -1<x<7.$$

Osserviamo ora cosa succede per $x=-1$ e per $x=7$.
Per $x=-1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n(-1-3)^n}{2n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n(-4)^n}{2n^2+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n(-4)^n\frac{n}{2n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n^2+1}$$

che diverge per il criterio del confronto asintotico; infatti è asintoticamente equivalente alla serie armonica (che non converge):

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n^2+1}\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ .$$

Per $x=7$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n(7-3)^n}{2n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n(4)^n}{2n^2+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n(4)^n\frac{n}{2n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^2+1}\ ,$$

che converge per il criterio di Leibenitz; infatti è una serie a termini a segno alterno e $\left\{\frac{n}{2n^2+1}\right\}$ è una successione decrescente.
In conclusione, la serie converge per $x\in(-1,7]$.